CONSTANTIN C. TEODORESCU
PROFESOR LA POLITEHNICA DIN BUCUREŞTI

CURS
DE
REZISTENŢA MATERIALELOR

EDIŢIA II-a

1 9 4 5

IMPRIMERIA CĂILOR FERATE ROMÂNE — BUCUREŞTI

Scanned with OKEN Scanner

CONSTANTIN C. TEODORESCU
PROFESOR LA POLITEHNICA DIN BUCUREŞTI

CURS
DE
REZISTENŢA MATERIALELOR

EDIŢIA II-a

2276

1 9 4 5

IMPRIMERIA CĂILOR FERATE ROMÂNE — BUCUREŞTI

Scanned with OKEN Scanner

Prefață la Ediția II-a

Prima ediție a acestui curs, tipărită în 1926, în forma în care era prezentat la Politehnica din Timișoara, nu se mai găsește. Cartea a fost întrebuințată de studenții mei, de alți studenți de la Politehnici precum și de la alte școli speciale și faptul că a fost corespunzătoare cu nivelul și nevoile lor m'a făcut să-i păstrez același cadru, așa că ea apare astăzi neschimbată în forma ei.

In prima ediție cursul era destinat facultăților de electromecanică și mine. Pentru a răspunde și la cerințele facultății de construcții s'au adăogat noi capitole. Pe lângă aceasta s'a remaniat și s'a completat materialul, acolo unde nevoile au cerut.

Astfel s'a mărit primul capitol privitor la proprietățile materialelor, dându-se modul de calcul și de reprezentare al rezistențelor și desvoltându-se ruperea materialelor. La capitolul îmbinărilor s'a adăogat sudura, care făcea parte din curs din 1930.

La studiul grinzilor drepte s'au completat capitolele cu grinda articulată, linii de influență, deformația, grinda continuă și grinzi static nedeterminate.

S'au adăogat capitole noi: grinzile cu zăbrele și sistemele static nedeterminate, cerute de program și din care cel de al doilea nu se predă desvoltat de cât la constructori.

S'a introdus capitolul sarcinilor dinamice, tratând această chestiune elementar cu ajutorul lucrului mecanic, de care se va vorbi și mai târziu la sistemele static nedeterminate. Nu am insistat asupra dimensionării pieselor la sarcini dinamice, ceia ce revine cursurilor de mașini.

Nu trebue pierdut din vedere că scopul cursului de rezistența materialelor și statica grafică la Politehnică este

Scanned with OKEN Scanner

de a pune în mâna studentului principiile, raţionamentele şi metodele de calcul, cu care el să poată să-şi dimensioneze construcţiile. De aceea în mod voit am păstrat o formă scurtă şi concisă, fără a îngrămădi prea multe detalii, sau adânci unele părţi teoretice, asupra cărora studentul se va putea documenta mai târziu, în cărţile şi revistele tehnice ce le va avea la îndemână.

Toate aceste cunoştinţe sunt noi şi câştigarea lor este desigur grea. Cursul este o schemă şi studentul este ajutat în calea lui prin expunerea orală, care dă viaţă şi înţeles acestor cunoştinţe. Dar atât nu este de ajuns, ci trebue ca studentul să ajungă să se poată folosi de aceste cunoştinţe, să le mânuiască cu îndemânare şi siguranţă. Arta inginerului are desigur nevoe de raţionament şi de calcul, dar cere şi o anumită intuiţie pentru a înţelege, educaţie şi disciplină tehnică pentru a putea stăpâni numeroasele cazuri întâlnite în practică şi a le adapta la schema ştiinţifică cunoscută. Acestea nu se pot găsi gata în cărţi, ci se formează cu încetul. O culegere de probleme stă la îndemâna studenţilor pentru a-i ajuta la primii paşi, şi fie care trebue să fie convins că drumul greu al uceniciei în calculele de rezistenţă nu se poate face de cât cu răbdare, muncă şi conştiinciozitate.

Tipărirea aeestui curs era cerută de studenţi şi dorită de mine, dar greutăţile erau mari. Datorită sprijinului colegilor de la Direcţia Economatului, el a putut fi tipărit la Imprimeria C. F. R. Aduc aci mulţumirile mele tuturor celor ce m'au ajutat.

Bucureşti, Novembre 1945.

Constantin C. Teodorescu

———▬———

Scanned with OKEN Scanner

Tabla de Materii

Cap. I. Proprietăţile materialelor.

Pag.

1. Corpuri rigide, corpuri elastice, corpuri plastice, Echilibru static şi echilibru elastic 1
2. Rezistenţe sau eforturi specifice, natura lor 3
3. Modul cum lucrează rezistenţele 6
4. Deformaţiile ce întovărăşesc rezistenţele, natura lor 10
5. Relaţia între rezistenţe şi deformaţii, legea lui Hooke . . . 13
6. Curba caracteristică a materialelor ce ascultă de legea lui Hooke 14
7. Contracţia transversală 18
8. Lucrul mecanic de deformaţie 21
9. Deformaţia elastică şi permanentă, domeniul elastic, domeniul deformaţiilor mari 22
10. Curba caracteristică a materialelor ce nu ascultă de legea lui Hooke 24
11. Alte proprietăţi ale materialelor, tehnologia 25

Cap. II. Ruperea materialelor.

12. Mecanismul ruperii 26
13. Ipotezele de rupere 28
14. Sarcini dinamice 32
15. Coeficient de siguranţă, rezistenţe admisibile 34

Cap. III. Rezistenţele simple.

§ 1. Intinderea.

16. Ipoteza secţiilor plane şi repartiţia rezistenţelor dedusă din experienţă 39
17. Rezistenţa într'o secţie înclinată 40
18. Calculul deformaţiilor 40
19. Lucrul mecanic de deformaţie 41

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

20. Calculul pieselor la întindere când ţinem cont de greutatea proprie 42
21. Bara de egală rezistenţă 43
22. Aplicaţiuni la întindere 44
a) Calculul unui cablu de cânepă
b) Calculul nnui cablu de oţel
c) Calculul curelelor
d) Calculul unui cazan
e) Calculul unui volan
f) Solicitare dinamică

§ 2. Compresiunea.

23 Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă . 52
24. Rezistenţe, deformaţii 52
25. Calculul unei coloane 54

§ 3. Tăierea.

26. Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă .
27. Rezistenţa într'o secţie înclinată . . . . . .
28. Deformaţii şi lucru mecanic de deformaţie . . . . .
29. Relaţia între E şi G . . . . . .

§ 4. Răsucirea.

30. Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă . 57
31. Calculul deformaţiei . . . . . .
32. Lucrul mecanic de deformaţie 60
33. Calculul arborilor 60
34. Calculul resoartelor 61

§ 5. Incovoierea.

35. Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă . 63
36. Calculul deformaţiei 65
37. Lucrul mecanic de deformaţie 66

§ 6. Temperatura

38. Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor 66
39. Calculul deformaţiilor 67
40. Lucrul mecanic de deformaţie 68
41. Calculul conductelor electrice 68

Tabloul formulelor întrebuinţate pentru rezistenţele simple . 72

Cap. IV. Rezistenţa îmbinărilor.

42. Despre îmbinări 73
43. Bulonul, dimensionarea lui 74

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

44. Bulonarea pieselor 76
45. Bulonarea barelor rotunde 77
46. Pana, îmbinarea cu pană 78
47. Nitul, dimensionarea lui 79
48. Imbinări nituite 80
49. Calculul îmbinărilor nituite 81
50. Calculul îmbinărilor nituite cu o secţie de tăiere 82
51. Calculul îmbinărilor nituite cu două secţii de tăiere . . . 83
52. Imbinări sudate 85
53. Imbinări de lemn 87

Cap. V. Momente încovoietoare şi forţe tăietoare.

§ 1. Definiţii.

54. Grindă dreaptă 89
55. Sarcinile ce lucrează asupra grinzilor, reacţiuni, reazeme . 89
56. Condiţiile de echilibru 91

§ 2. Momente încovoietoare şi forţe tăietoare.

57. Definiţii 93
58. Relaţia între momentul încovoietor şi forţa tăietoare . . 94
59. Sarcini permanente 96
a) Grindă înţepenită, sarcină concentrată
b) Grindă înţepenită, sarcină uniform distribuită
c) Grindă înţepenită, sarcină distribuită liniar
d) Grindă rezemată, sarcină concentrată
e) Grindă rezemată, sarcină uniform distribuită
60. Sarcini indirecte 103
a) Sarcină concentrată
b) Sarcină uniform distribuită
61. Grindă articulată 106
62. Sarcini mobile 110
a) o singură sarcină
b) două sarcini
c) mai multe sarcini mobile
d) soluţie grafică

§ 3. Linii de influenţă.

63. Definiţii 116
64. Aflarea liniilor de influenţă 117
a) Linia de influenţă a reacţiunii
b) Linia de influenţă a momentului încovoietor
c) Linia de influenţă a forţei tăietoare

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

65. Linii de influenţă pentru sarcini indirecte 120
66. Linii de influenţă la grinda articulată 121

Cap. VI. Momente statice şi momente de inerţie.

67. Definiţii 121
68. Variaţia momentelor de inerţie faţă de axe paralele . . . 124
69. Variaţia momentelor de inerţie faţă de axe concurente . . 125
70. Calculul momentelor de inerţie 126
a) dreptunghiu
b) platbande
c) dreptunghiu gol
d) secţie dublu-T
e) cerc
f) sfert de cerc
g) secţiile fiarelor laminate
71. Calculul grafic al momentelor de inerţie 130
72. Reprezentarea grafică a momentelor de inerţie 133
73. Elipsa de inerţie 136

Cap. VII. Determinarea rezistenţelor în grindă.

74. Definiţii 137
75. Incovoiere curată. Linia forţelor este o axă principală . . 138
76. Cazul II. Axa momentului nu este o axă principală . . . 140
77. Tăierea 143
78. Lunecarea longitudinală 143
a) secţie dreptunghiulară
b) secţie compusă din dreptunghiuri
c) secţie circulară
79. Rezistenţele într'o secţie înclinată. Rezistenţe principale . . 145
80. Dimensionarea secţiilor la grinzile supuse la incovoiere . . 149
a) calculul unei grinzi nituite
b) calculul unei grinzi sudate
c) calculul unei grinzi de lemn cu pene
81. Grinzi de egală rezistenţă la încovoiere 156
82 Secţii neomogene supuse la încovoiere 158
83. Critica teoriei încovoierii 161

Cap. VIII. Deformaţia grinzilor drepte.

84. Deformaţiile elementare 163
a) Deformaţia datorită momentului încovoietor
b) Deformaţia datorită forţei tăietoare

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

85. Ecuaţia diferenţială a axei deformate 164
a) grinda înţepenită
b) grinda rezemată
86. Săgeata produsă de lunecare 169
87. Integrarea ecuaţiei diferenţiale a axei deformate . . . 170
88. Determinarea grafică a axei deformate 174

Cap. IX. Grinzi drepte static nedeterminate.

89. Intrebuinţarea ecuaţiei de deformaţie 177
90. Grinda continuă 179
91. Aplicaţii 181
a) Grindă pe trei reazeme, sarcină uniform distribuită
b) Grindă pe patru reazeme
c) Grindă înţepenită şi rezemată
d) Grindă înţepenită la ambele capete
92. Puncte fixe 184
93. Aflarea grafică a momentelor pe reazeme 186
94. Linii de influenţă 189

Cap. X. Rezistenţe compuse.

95. Suprapunerea efectelor 191
96 Rezistenţe reduse 192

§ 1. Incovoiere cu întindere sau compresiune.

97. Aflarea rezistenţelor 193
98. Sâmbure central 196
99. Calculul masivelor de zidărie 199

§ 2. Incovoiere cu răsucire.

100. Aflarea rezistenţelor 201
101. Calculul arborilor 202
102. Calculul manivelei 205
103. Calculul fusurilor 206

Cap. XI. Flambajul.

104. Studiul experimental al flambajului 208
105. Stabilirea formulei lui Euler. Cazul a 210
cazul b
cazul c
cazul d

Pag.

106. Flambaj cu încovoiere 214
107. Critica formulei lui Euler 215
108. Formule de dimensionare 218
109. Coeficientul de flambaj 219
110. Flambaj prin încovoiere 220
111. Calculul stâlpilor cu zăbrele 221

Cap. XII. Grinzi cu zăbrele.

112. Sisteme articulate 224
113. Noduri şi bare, sarcini şi eforturi 225

§ 1. Determinarea eforturilor în bare.

114. Metoda figurilor reciproce sau a lui Cremona 226
115. Metoda momentelor sau a lui Ritter 229
116. Metoda lui Culmann 231
117. Calculul fermelor de lemn 232

§ 2. Linii de influenţă la grinzi cu zăbrele.

118. Valorile eforturilor la sarcini mobile cu ajutorul liniilor de influenţă 235
119. Linia de influenţă pentru efortul în tălpi 235
120. Linia de influenţă pentru efortul în diagonale 236
121. Linia de influenţă pentru efortul în verticale 240

§ 3. Diferile grinzi cu zăbrele.

122. Grinda cu tălpi paralele 241
123. Grinda cu tălpi paralele, diagonale în K 243
124. Grinda cu tălpi oarecare, cu diagonale 244
125. Grinda cu tălpi oarecare, cu montanţi 246
126. Calculul unei grinzi de macara 248

§ 4. Deformaţia grinzilor cu zăbrele.

127. Deformaţiile elementare 250
128. Aflarea săgeţii cu ajutorul forţelor elastice 252
129 Aflarea săgeţii cu ajutorul lucrului mecanic 254

Cap. XIII. Impingerea pământului.

130. Unghiul taluzului natural 256
131. Calculul împingerii E 257
132. Cazuri particulare 259
a) teren plan
b) zid vertical, teren orizontal

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

c) teren cu linie frântă
133. Calculul zidurilor de sprijin 263
134. Impingerea pământului într'un masiv nelimitat 264

Cap. XIV. Sarcini dinamice.

135. Modul de lucru al sarcinilor dinamice 266
136. Piesă supusă la o sarcină axială prin lovire 267
137. Piesă supusă la un moment de răsucire prin lovire . . . 271
138. Piesă supusă la încovoiere prin lovire 272
139. Comparaţia între diferite încărcări 274
140. Factorul dinamic *n* 275

Cap. XV. Sisteme static nedeterminate.

141. Definiţii 279

§ 1. Teoria generală a grinzilor.

142. Lucrul mecanic 280
143. Teoremele lui Castigliano 282
144. Principiul lucrului virtual 284
145. Teorema lui Maxwell 286
146. Generalizarea legii lui Hooke 287
147. Stabilirea formulelor generale 289

§ 2. Sisteme de grinzi.

148. Grinda atârnată 292
149. Grinda armată 295
150. Pod suspendat 297
151. Grinda proptită 298

§ 3. Cadre.

152. Cadru cu două articulaţii 300
a) cadru simetric, sarcină verticală
b) cadru simetric, sarcină orizontală
c) cadru nesimetric, sarcină verticală
d) cadru nesimetric, supus la temperatură
153. Cadru înţepenit 307
a) cadru simetric, sarcină verticală
154. Cadru închis 311
a) cadru dreptunghiular, sarcină orizontală
155. Cadru cu două deschideri 315
156. Cadre multiple şi cu etaje 319

Scanned with OKEN Scanner

Pag.

§ 4. Arce, bolți.

157. Arc articulat 319
a) arc parabolic
b) linia de influență
c) temperatura
158. Arc cu coardă 324
159. Arc înțepenit 325

Cap. XVI. Încovoierea barelor curbe

160. Forțe exterioare 330
161. Determinarea rezistențelor 331
162. Calculul coeficientului k 334
163. Deformația barelor curbe 337
154. Aplicații 338
a) calculul unei conducte
b) calculul inelelor pistonului
c) calculul unui volan
d) calculul unui inel de lanț
e) cârlig de macara

Cap. XVII. Starea rezistențelor într'un corp.

165. Cele șase rezistențe 349
166. Ecuațiile de echilibru 350
167. Variația rezistențelor σ și τ 351
168. Deformațiile produse 354
169. Ecuațiile de echilibru în funcție de deformații 357
170. Aplicații 357

Cap. XVIII. Calculul plăcilor și vaselor.

171. Generalități 364

§ 1. Calculul plăcilor circulare.

172. Echilibrul unui element 365
173. Aflarea rezistențelor 366
174. Aflarea ecuației diferențiale a plăcii 367
175. Determinarea constantelor 369
176. Calculul aproximativ al plăcilor 376

§ 2. Calculul vaselor cu pereți groși.

177. Echilibrul unui element 379

Scanned with OKEN Scanner

Pag

178. Aflarea rezistenţelor 379
179. Aflarea ecuaţiei diferenţiale 380
180. Determinarea constantelor 380

§ 3. Calculul discurilor care se rotesc.

181. Echilibrul unui element 383
182. Aflarea rezistenţelor şi integrarea ecuaţiei 384
183. Determinarea constantelor 385
184. Disc de egală rezistenţă 386

§ 4. Calculul vaselor cu pereţi subţiri.

185. Echilibrul unui element 387
186. Aflarea rezistenţelor 389
187. Aplicaţii 390
a) Calculul unei centrifuge
b) Calculul unui rezervor

Cap. XIX. Oscilaţii.

188. Generalităţi 393
189. Oscilaţii la întindere 394
190. Oscilaţii la torsiune 395
191. Propagarea rezistenţelor în interiorul corpului 397

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul notaţiilor

Mărimile ce se întâlnesc în rezistenţa materialelor sunt mărimi fizice măsurate în unităţi de dimensii anumite. Ele sunt în mare parte mărimi dirijate, având mărime, sens, direcţie, semn.

De obicei alegem ca unităţi fundamentale kg. şi cm. Pentru diferitele mărimi întrebuinţăm totdeauna aceiaşi notaţie, pentru a nu se face confuzii. In formule, care sunt omogene, trebue să introducem totdeauna aceleaşi unităţi, adică kg. şi cm. pentru a obţine rezultatele.

Dăm mai jos notaţiile întrebuinţate şi unităţile de măsură.

Notaţia	Mărimea	Unităţi
σ, τ	rezistenţă normală, tangenţială	kg/cm²
σ_r, τ_r	rezistenţe la rupere	„
σ_a, τ_a	rezistenţe admisibile	„
σ_{max}, τ_{max}	rezistenţe maxime	„
σ_I, σ_{II}	rezistenţe principale	„
σ_f	rezistenţă la flambaj	„
σ_{red}	rezistenţa redusă	„
$\overline{\sigma}$	rezistenţă virtuală	„
ε , γ	lungire specifică, lunecare specifică	număr
β	contracţie transversală	„
m	coeficient de contracţie transversală	„
δ, ψ	lungire la rupere, contracţie la rupere	%
Δl, Δs	lungire	cm
$\Delta\varphi$	rotaţie, variaţia unghiului	radian
E	coeficient de elasticitate	kg/cm²
G	coeficient de elasticitate transversală	„
L	lucru mecanic	kg/cm² sau kgr.cm.
Ω	secţie transversală	cm²
P	forţă, sarcină	kg

Scanned with OKEN Scanner

Notaţia	Mărimea	Unităţi
P_r	sarcina de rupere	kg
P_f	sarcina de flambaj	»
p	sarcina distribuită,	kg/ml
	presiune	kg/cm²
$t,\ \Delta t$	temperatura, creşterea temperaturii	°
α	coeficient de dilataţie	număr
$A,\ B$	reacţiuni ale reazemelor	kg
$X,\ Y$	reacţiuni static nedeterminate	»
$M,\ M_r$	moment încovoietor, de răsucire	kg cm
M_{max}	moment încovoietor maxim	»
$M_A,\ M_B$	momente pe reazeme	»
$\overline{M}$	moment virtual	cm
T	forţă tăietoare	kg
N	forţă normală	»
H	forţă orizontală, distanţă polară	»
l	deschiderea grinzii	m
η	ordonata liniei de influenţă	număr
$S_x,\ S_y$	momente statice	cm³
$I_x,\ I_y$	momente de inerţie axiale	cm⁴
I_{xy}	moment de inerţie centrifugal	»
$I_I,\ I_{II}$	momente de inerţie principale	»
I_p	moment de inerţie polar	»
$W_x,\ W_y$	module de rezistenţă	cm³
r	raza de giraţie	cm
ρ	raza de curbură	»
$S,\ D,\ I,\ V$	eforturi în barele grinzilor cu zăbrele	kg
f	săgeata maximă	cm
y	săgeată	»

Scanned with OKEN Scanner

23.VII.949
Craiova

ing. Alex. Negoiță
8.II.948

Cap. I. Proprietățile materialelor.

1. Corpuri rigide, corpuri elastice, corpuri plastice Echilibru static și echilibru elastic. In mecanică am făcut ipoteza că toate corpurile sunt rigide și ca urmare am avut teorema: putem muta o forță dintr'un punct în altul pe direcția ei, atunci când cele două puncte sunt rigid legate între ele.

In rezistența materialelor corpurile se deformează, distanța între puncte se schimbă, ipoteza rigidității cade. Totuși deformația corpului se face după anume legi și vorbim de corpuri elastice. Când deformația este mare și permanentă vorbim de corpuri plastice.

Se naște întrebarea, dacă mai putem întrebuința în rezistența materialelor aceleași reguli de echilibru și de calculul forțelor ca în mecanică.

Să ne servim de un exemplu.

O grindă de balcon este înțepenită la un capăt și încărcată la celălalt cu o sarcină *P*. Sub această sarcină grinda se va deforma, dar se stabilește o poziție de echilibru, când sarcina este transmisă la reazim dând reacțiunile. In acest timp se nasc între moleculele grinzii forțele interioare, care iau valori bine determinate pentru poziția de echilibru, când nici forma grinzii nu se mai schimbă, distanțele între puncte rămânând aceleași. Deci corpul nostru este ca un corp rigid și putem aplica regulile mecanicei la corpul în poziția deformată, considerată indeformabilă.

Nu cunoaștem încă poziția deformată, dar dacă deformația este foarte mică putem să luăm forma dinainte de deformație. (fig. 1).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă avem o deformaţie mare, de ex. un teu care se îndoaie sub greutatea lui proprie, atunci deosebirea între forma dinainte şi cea după deformaţie, necunoscută, este aşa de mare încât liniile de acţiune ale forţelor se schimbă cu totul, deci şi momentele în raport cu un punct şi toate celelalte elemente geometrice, pe care le cere mecanica pentru studiul şi calculul forţelor. Pe când în cazul dintâi linia de acţiune a forţei rămâne aceeaşi sau aproape aceeaşi.

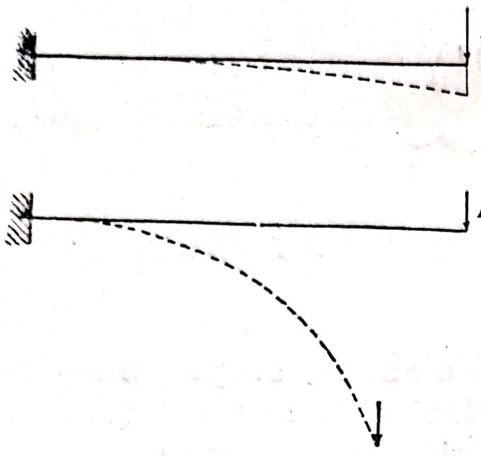


Fig. 1.

Cu această restricţiune, a deformaţiilor mici, toate regulile mecanicei se întrebuinţează întocmai.

Pentru corpurile care sunt în mişcare, de ex. organele de maşini, forţele trebuesc să satisfacă ecuaţiile din dinamică, pentru a avea mişcarea cerută de rolul lor; pentru corpurile în repaus, de ex. construcţiile, forţele trebuiesc să satisfacă condiţiile de echilibru din statică. După cum se ştie din mecanică, se reduce cazul dinamic la cel static, introducând forţele de inerţie. Se vorbeşte în acest caz de *stabilitate*.

In mecanică nu avem a ne interesa de valoarea forţelor ce intră în joc, o sârmă întinsă la capete de două forţe egale şi direct opuse este în echilibru. Noi ştim însă că, dacă forţele întrec o anumită valoare, sârma se rupe şi echilibrul este distrus.

In rezistenţă un corp nu este în echilibru întotdeauna. Dacă valoarea forţelor creşte peste anumită limită, rezistenţa materialului, corpul se rupe, căci echilibrul nu se mai poate stabili. Aci este vorba de echilibrul forţelor moleculare, din interiorul corpului, *echilibrul elastic*.

Vorbim deci în rezistenţă de *stabilitate*, care este condiţia de echilibru din statică, la care trebue să satisfacă forţele; şi despre *rezistenţă*, condiţie la care trebue să satisfacă forţele interioare, elastice, pentru ca echilibrul să nu fie distrus.

Echilibrul elastic se stabileşte între forţele interioare dintre moleculele corpului, pe care le numim *rezistenţe*, şi care se nasc, în urma deplasărilor moleculelor, una faţă de alta, în urma

deformaţiei. Aceste deplasări ale diferitelor puncte ale corpului sunt *deformaţiile.*

Ne vom ocupa deci de modul cum se deformează un corp sub acţiunea forţelor exterioare, adică de deformaţiile lui, şi de rezistenţele ce se nasc corespunzător cu aceste deformaţii.

2. Rezistenţe sau eforturi specifice, natura lor. Dacă luăm un corp supus la diferite forţe, acestea trebuesc să îndeplinească condiţiile de echilibru din mecanică. Sub acţiunea lor corpul se deformează. Dar materia răspunde, opunându-se la deformaţii; se nasc în interiorul corpului forţe interioare sau eforturi. Şi forţele exterioare, adică acelea care lucrează din afară asupra corpului, se exercită tot prin intermediul unor corpuri. Dacă ne închipuim un corp *A* care apasă asupra altui corp *B*, în punctul de contact se va produce o turtire, deci nu vom avea un punct ci o suprafaţă de reazem (fig. 2). Acţiunea *B* pe care corpul *A* o exercită asupra corpului *B*, este egală cu reacţiunea *A*, pe care corpul *B* la rândul lui o exercită asupra lui *A*. Modul de repartizare al forţei pe suprafaţa de contact nu ne este în general cunoscut, dar facem felurite ipoteze, mai mult sau mai puţin apropiate de adevăr.

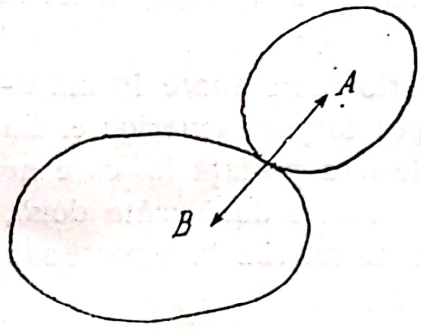


Fig. 2.

Tot aşa şi forţele interioare, ce se nasc în interiorul corpului, le privim ca rezultat al forţelor de coeziune, care leagă între ele diferitele părticele din corp. Dacă separăm corpul în două printr'o secţie, vom zice după regulile cunoscute din mecanică, că partea din stânga va exercita o acţiune asupra celei din dreapta, la care aceasta va răspunde cu o reacţiune egală şi de semn contrar. Cele două eforturi *F* sunt egale şi de semne contrare. (fig. 3).

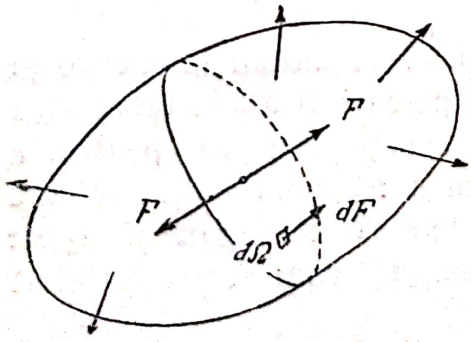


Fig. 3.

Cum este repartizată acţiunea şi reacţiunea *F* pe această suprafaţă?

Scanned with OKEN Scanner

Va trebui să urmărim această problemă şi în acest scop ne vom referi la un element din suprafaţa $d\Omega$, pe care revine un element din efortul total dF.

Numim *rezistenţă* raportul

$$R = \frac{dF}{d\Omega}$$

care este o mărime dirijată, având punct de aplicaţie în centrul elementului, direcţie şi sens, acelea ale lui dF, mărime pe care o exprimăm în kg/cm², dar care este legată de o suprafaţă, $d\Omega$, care are deasemenea o mărime şi o direcţie, definită prin normala ei.

Rezistenţa este deci un efort interior care apare în măsura în care materia răspunde la acţiunea forţelor exterioare. Ea este o mărime fizică dirijată, legată de o suprafaţă la care ne referim. Rezistenţele apar ca forţele interioare două câte două, egale şi de semne contrare, după cum ne referim la o parte sau la alta a corpului separat prin secţia luată.

Pentru aplicaţiile ce urmează este folositor să considerăm rezistenţa prin cele două componente ale ei, (fig. 4) după normala la suprafaţă, pe care o numim *rezistenţă normală* şi o notăm cu σ, şi după o perpendiculară la normală pe care o numim *rezistenţă tangenţială*, pentru că este conţinută în planul tangent la suprafaţă şi o notăm cu τ. Vom vorbi deci de două rezistenţe, de direcţii cunoscute, σ normală pe secţie, τ conţinută în secţie, şi vom urmări numai mărimea lor.

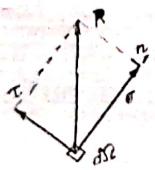


Fig. 4.

Este bine să vedem cu ochii aceste rezistenţe şi de aceia le vom prezenta intuitiv.

Dacă luăm o bară de fier, supusă la întindere cu forţa P, se va naşte în interior un efort, pe care îl aflăm tăind bara printr'o secţie. Luând bucata din stânga (fig. 5) pentru a restabili echilibrul va trebui să luăm o forţă interioară R, care după cum ştim din mecanică trebue să fie egală şi direct opusă cu P. Luând bucata din dreapta vom obţine un efort egal şi direct opus lui R.

Admiţând o lege simplă, că repartiţia efortului este uniformă pe secţie, pe un cm² va reveni

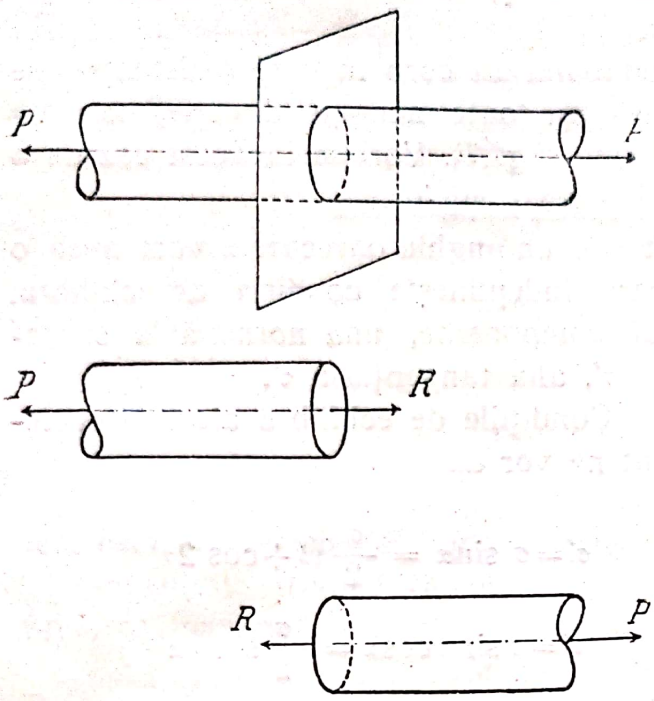


Fig. 5.

$$\sigma = \frac{P}{\Omega}$$

rezistenţa este normală la suprafaţă, fiindcă va avea direcţia lui P, după axa piesei, care coincide cu normala la secţie. Rezistenţa σ se măsoară în kg/cm², după cum ne indică formula.

Dacă luăm o tablă de fier, pe care vrem să o tăiem cu foarfeca, repetăm acelaş raţionament. Lamele foarfecei se deplasează într'un plan, iar forţa tăietoare lucrează în acest plan. (fig. 6). Bucata din stânga tinde să se mişte în sus, bucata din dreapta în jos, alunecând una peste alta în planul de tăiere.

Materialul se opune la această lunecare, se naşte o forţă interioară egală cu forţa tăietoare T, se nasc rezistenţe care vor fi conţinute în planul de tăiere.

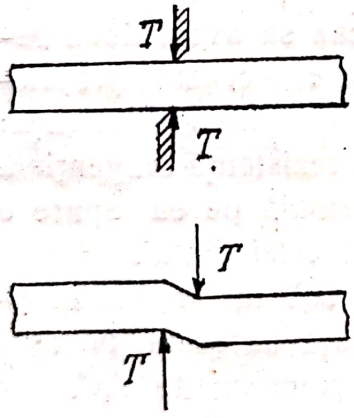


Fig. 6.

Dacă admitem o lege simplă, că repartiţia efortului este uniformă pe secţie, pe un cm² va reveni

$$\tau = \frac{T}{\Omega}$$

rezistenţa este conţinută în secţia de tăiere, este deci o rezistenţă tangenţială. Ea se măsoară în kg cm².

3. Modul cum lucrează rezistenţele. Intr'un corp supus la acţiunea unor forţe exterioare, se nasc în interior rezistenţe şi raportăm aceste rezistenţe la suprafeţele pe care ele lucrează. Vom lua diferite cazuri şi vom vedea modul cum lu-

Scanned with OKEN Scanner

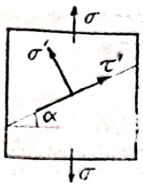


Fig. 7.

crează rezistenţele şi cum se calculează ele în diferite secţii.

Ne închipuim un corp în care rezistenţele pe plane paralele au toate aceeaşi direcţie, normală pe aceste plane (fig. 7). Vorbim în acest caz de o stare liniară a rezistenţelor.

Pe un plan înclinat sub un unghiu oarecare α vom avea o rezistenţă oarecare p', care îndeplineşte condiţia de echilibru. Ne-o închipuim prin două componente, una normală la suprafaţă σ', alta tangenţială τ'.

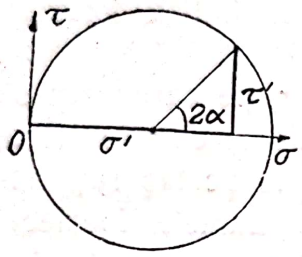


Fig. 8.

Condiţiile de echilibru ale acestui element ne vor da

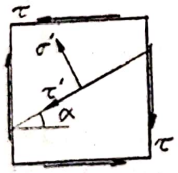
$$\sigma' = \sigma \sin\alpha = \frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\tau' = \sigma \sin\alpha \cos\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$$

O reprezentare grafică simplă (fig. 8), ne dă mijlocul de a avea valorile σ', τ' pentru orice unghiu α.

Ne închipuim un corp în care, în plane normale între ele, avem numai rezistenţe tangenţiale τ. Avem în acest caz o stare plană a rezistenţelor (fig. 9).

Condiţia de echilibru cere în acest caz să avem două perechi de cuple, deci egalitatea rezistenţelor τ. Această proprietate se numeşte dualitatea rezistenţelor tangenţiale şi se enunţă: când într'o secţie avem o rezistenţă tangenţială τ, atunci într'o secţie normală pe ea apare o rezistenţă τ egală şi opusă celei dintâi.



[Fig. 9.

Pe un plan înclinat sub un unghiu oarecare α vom avea o rezistenţă oarecare, pe care ne-o închipuim prin două componente σ', τ'.

Condiţiile de echilibru ne vor da

$$\sigma' = 2\tau \sin\alpha \cos\alpha = \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau' = \tau \cos^2\alpha - \tau \sin^2\alpha = \tau \cos 2\alpha$$

Dacă ne închipuim două planuri, făcând între ele un unghiu $d\alpha$, atunci rezistenţele σ, τ dintr'un plan, vor varia cu o

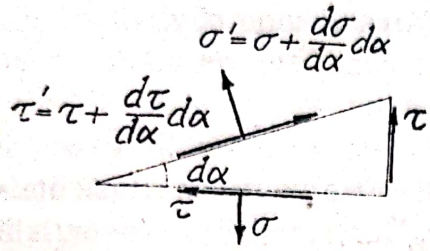


Fig. 10.

cantitate infinit mică pentru a ne da rezistenţele $\sigma' \tau'$ în al doilea plan (fig. 10). Luând prizma limitată de un plan perpendicular, vom lua pe acest plan o rezistenţă τ.

Condiţiile de echilibru ne vor da

$$\left(\sigma + \frac{d\sigma}{d\alpha} d\alpha\right) = \sigma \cos^2 d\alpha - 2\tau \sin d\alpha \cos d\alpha$$

ceiace ne duce la

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = -2\tau$$

deci derivata rezistenţei normale este egală cu dublul rezistenţei tangenţiale. Rezultă că acolo unde rezistenţa normală are valoarea maximă rezistenţa tangenţială este nulă şi invers.

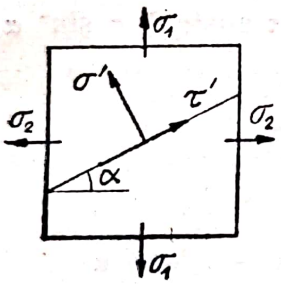


Fig. 11.

Ne închipuim un corp în care, în plane perpendiculare unul pe altul, avem rezistenţe maxime, deci în acele plane rezistenţele tangenţiale sunt nule (fig. 11). Avem în acest caz o stare plană a rezistenţelor dată de σ_1, σ_2.

Pe un plan înclinat sub un unghiu oarecare α vom avea o rezistenţă oarecare, pe care ne-o închipuim prin două componente σ' şi τ'.

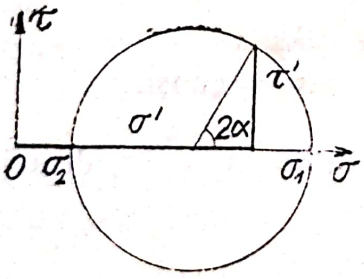


Fig. 12.

Condiţiile de echilibru ne vor da

$$\sigma' = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha$$
$$\tau' = \sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha - \sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha$$

sau

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

reprezentarea grafică se vede în figură (fig. 12).

In caz când σ_1 şi σ_2 sunt egale şi de semne contrare, atunci vom avea

$$\sigma' = \sigma \cos 2\alpha$$
$$\tau' = \sigma \sin 2\alpha$$

Scanned with OKEN Scanner

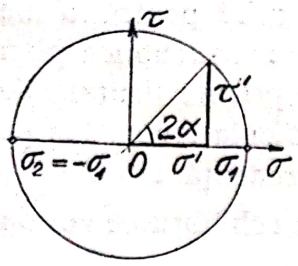


Fig. 13.

iar reprezentarea devine (fig. 13) şi vedem că acest caz este asemănător cu cazul rezistenţelor tangenţiale.

Ne închipuim un corp în care, în plane normale între ele, avem rezistenţele normale σ_x, σ_y, iar rezistenţa tangenţială este τ, care trebue să fie aceiaşi în cele două plane (fig. 14). Avem în acest caz o stare plană a rezistenţelor.

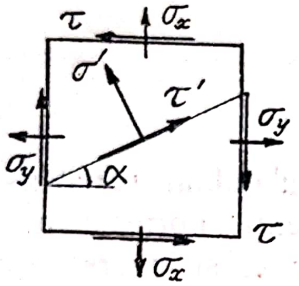


Fig.14.

Pe un plan înclinat sub un unghiu oarecare α vom avea o rezistenţă oarecare, pe care ne o închipuim prin două componente σ', τ'.

Condiţiile de echilibru ne vor da

$$\sigma' = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\tau' = \sigma_x \sin\alpha \cos\alpha - \sigma_y \cos\alpha \sin\alpha - \tau \cos^2\alpha + \tau \sin^2\alpha$$

care se pot transforma

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau \cos 2\alpha$$

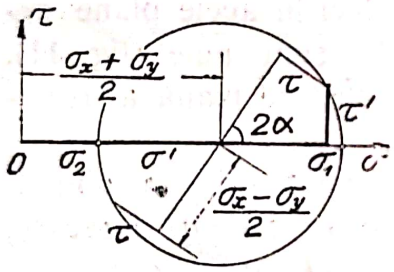


Fig. 15.

Când α variază, obţinem prin eliminare, un cerc

$$\left(\sigma' - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau'^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \text{const.}$$

Această reprezentare simplă este datorită lui Mohr, de aci numele de *cercul lui Mohr* (fig. 15).

Se vede că raza cercului este

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y) + 4\tau^2}$$

aşa că valorile maxime pe care le poate atinge rezistenţa normală σ' sunt

$$\sigma'_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

când $\tau' = 0$, după cum cere şi teorema generală.

Scanned with OKEN Scanner

In schimb rezistenţele tangenţiale pot atinge valorile maxime

$$\tau'_{1,2} = \mp \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

care sunt tocmai extremităţile diametrului cercului.

Mohr a extins această reprezentare la cazul unui corp supus la trei rezistenţe σ_1 σ_2, σ_3 în cele trei direcţii. Vom avea trei cercuri pe cele trei diametre, reprezentate prin diferenţele rezistenţelor luate câte două. (fig. 16).

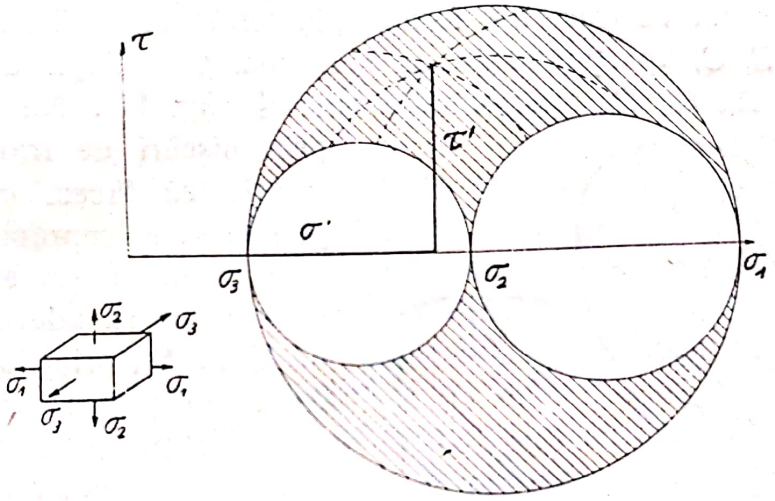


Fig. 16

Dacă ducem un plan oarecare definit prin normala lui, vom avea rezistenţele σ', τ' care sunt date prin coordonatele faţă de cele trei cercuri ale unui punct din regiunea haşurată. Când punctul este pe unul din cercuri, suntem în cazul rezistenţelor în planul considerat.

O concluzie care ne va servi mai târziu o putem trage numai decât din figură: se vede că rezistenţele tangenţiale maxime vor fi

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)$$

$$\tau_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)$$

dintre acestea valoarea cea mai importantă este aceia care co-

respunde cercului exterior. Se poate deci spune că pentru rezistenţa tangenţială maximă σ_2 nu joacă un rol, şi că aceasta atârnă de diferenţa rezistenţelor maxime extreme.

4. Deformaţiile ce întovărăşesc rezistenţele, natura lor. Sub acţiunea forţelor corpurile se deformează. Se nasc rezistenţe care se opun la aceste deformaţii, dar numai în măsura deformaţiilor produse.

Deformaţia este schimbarea formei corpului, transformarea prin care un corp trece de la o formă la alta.

Corpul va trece din forma I, în forma II, iar diferite puncte O, A, B, C, aparţinând formei I, le vom găsi după deformaţie în O_1, A_1, B_1, C_1, aparţinând formei II. (fig. 17). Nu se poate prin mişcări de translaţie şi rotaţie să facem ca acestepuncte să se suprapună.

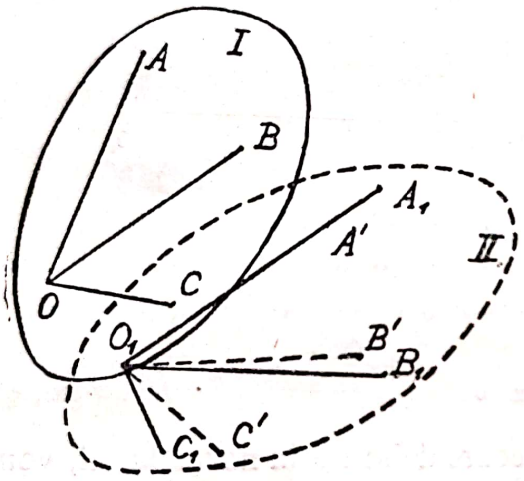


Fig. 17

Printr'o mişcare de translaţie putem să aducem punctul O în O_1, printr'o mişcare de rotaţie putem aduce planul AOB pe $A_1O_1B_1$ şi dreapta OA pe O_1A_1. Dar punctul A nu va cădea în A_1 ci în A' din cauză că distanţa OA a variat; direcţia OB nu va cădea în O_1B_1 ci în O_1B' din cauză că unghiul ABC a variat; direcţia OC nu va cădea O_1C_1 ci în O_1C'.

Dacă deci considerăm direcţia O_1A_1 vedem că avem o schimbare de la lungimea O_1A la O_1A': Un element ds depe această dreaptă se va lungi cu Δds. Numim *lungire specifică*

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds}$$

Dacă considerăm planul $O_1A_1B_1$ vedem că avem o schimbare de la unghiul $A_1O_1B_1$ la unghiul $A'O_1B'$. Numim *lunecare specifică* variaţia unghiulară pentru cazul când unghiul AOB este $\frac{\pi}{2}$, adică ne raportăm la variaţia unghiurilor drepte. Această lunecare se notează cu γ.

Este bine să vedem cu ochii aceste deformaţii şi de aceia le vom prezenta intuitiv.

Dacă pe o bară supusă la întindere, care se deformează, se lungeşte, notăm înainte de deformaţie două puncte, A,B la distanţa l, după deformaţie vom găsi distanţa $AB' = l'$, care a variat cu (fig. 18).

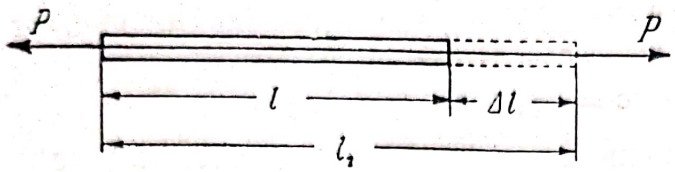


Fig. 18.

$$\Delta l = l' - l$$

lungirea specifică este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

care este un număr şi se măsoară în procente %.

In cazul tablei tăiată de foarfece, pentru a vedea deformaţia, trebue să luăm spaţiul care este între lamele foarfecei. Unghiul drept se deformează şi variaţia lui este γ. Măsurarea lunecării γ se face cu ajutorul tangentei, fiindcă este vorba de un unghiu, şi deci este dată tot de un număr.

Deformaţiile găsite ε,γ sunt mărimi dirijate. Lungirea specifică ε este măsurată în direcţia dreptei care o poartă, lunecarea specifică γ este măsurată în planul în care este unghiul, plan caracterizat prin normala lui.

Un element de volum în formă de cub, cu latura egală cu unitatea, va putea fi deci supus la rezistenţe normale σ sau tan-

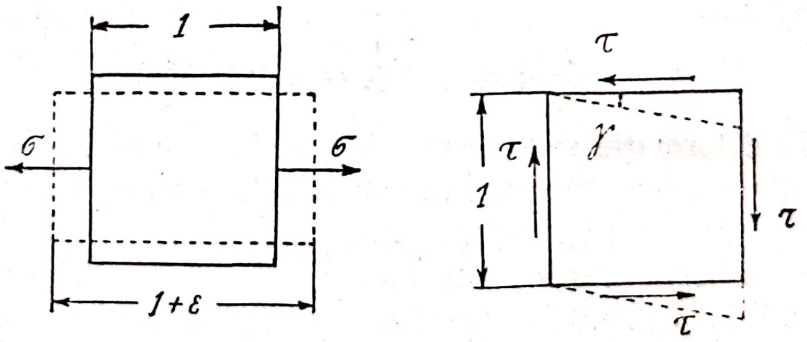


Fig. 19.

genţiale τ, pe feţele lui, luând deformaţiile ce corespund acestor rezistenţe ε şi γ (fig. 19).

Rezistenţele normale apar deci ca eforturi interioare, perechi de forţe şi produc lungirea, mişcare de translaţie în sensul nor-

malei; rezistenţele tangenţiale apar ca perechi de cuple şi produc lunecarea , mişcare de rotaţie în jurul axei normale pe secţie.

Putem pune în vedere această rotaţie.

Luăm unghiul drept AOB care se deformează în $A'OB'$. Dacă una din laturile unghiului drept s'a rotit cu $d\varphi_1$ într'un sens, cealaltă cu $d\varphi_2$ în sensul opus, variaţia unghiului drept este (fig. 20)

$$\sigma = d\varphi_1 + d\varphi_2$$

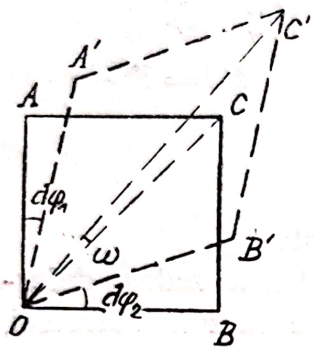


Fig. 20.

putem spune că fiecare dreaptă s'a rotit cu o cantitate ω, la care se adaugă lunecarea $\frac{\gamma}{2}$

Avem $A'OB' = \frac{\pi}{2} - (d\varphi_1 + d\varphi_2)$

bisectoarea unghiului AOB face unghiul $\frac{\pi}{4}$, care este unghiul AOC.

Unghiul AOC' este $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - (d\varphi_1 + d\varphi_2)\right) + d\varphi_1$

aşa încât unghiul ce-l fac cele două bisectoare COC', adică unghiul cu care s'a rotit bisectoarea, pe care îl notăm cu ω este

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - (d\varphi_1 + d\varphi_2)\right) + d\varphi_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(d\varphi_1 - d\varphi_2)$$

de unde rezultă

$$d\varphi_1 = \frac{\gamma}{2} + \omega \quad , \quad d\varphi_2 = -\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right)$$

Prin deformaţie se schimbă deci şi lungimile şi unghiurile, iar variaţia unghiulară este compusă dintr'o rotaţie şi o lunecare. Se vede pe figură (fig. 21) că un element ds care variază devine $ds + \Delta ds'$ dar schimbă şi direcţia. Segmentul AB ne dă această variaţie în mărime şi direcţie. Putem privi această variaţie compusă dintr'o schimbare în lungime, păstrând direcţia AA', care este lungirea Δds,

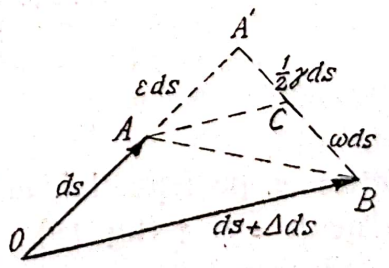


Fig. 21.

şi o variaţie de direcţie $A'B$, care la rândul ei se descompune în două: o variaţie de unghiu $A'C$, care este lunecarea $\frac{1}{2}\gamma ds$, şi o rotaţie simplă CB care este ωds.

5. Relaţia între rezistenţe şi deformaţii, legea lui Hooke. Un corp supus la o sarcină oarecare se deformează. La această deformaţie corespunde o repartiţie anumită a eforturilor interioare, aşa în cât avem stare de echilibru. Dacă mărim sarcina corpul se deformează mai mult, dacă micşorăm sarcina corpul revine la forma sa dinnainte, deformaţia dispare când sarcina încetează. Trebue deci să existe o lege care leagă între ele deformaţiile şi rezistenţele care se opun la aceste deformaţii.

Această relaţie o cunoaştem în mod calitativ din fizică. Sunt corpuri care îşi reiau forma lor când sarcina încetează. Astfel putem să ne convingem îndoind o lamă de oţel, care pe urmă, lăsată liberă, se îndreaptă iar. Asemenea corpuri se zic *elastice*, iar proprietatea generală a unor corpuri de a-şi relua forma când forţa nu mai lucrează, este *elasticitatea*.

Sunt corpuri care se deformează sub acţiunea sarcinilor exterioare şi păstrează această deformaţie şi după încetarea sarcinii: astfel o bucată de miez de pâine, un boţ de argilă udă. Acestea sunt corpuri *plastice*.

Nu există în natură corpuri perfect elastice, ci avem o întreagă scară între elasticitate şi plasticitate. Orice corp se deformează sub acţiunea sarcinilor şi nu revine exact la forma primitivă, ci păstrează o deformaţie care rămâne şi de aceia se chiamă chiar deformaţie permanentă. Prin opoziţie deformaţia care revine se chiamă deformaţie elastică.

Relaţia între rezistenţă şi deformaţie, care stabileşte în acelaş timp şi gradul de elasticitate al corpului, a fost găsită de *Robert Hooke* (1678) care a făcut experienţe asupra firelor de oţel şi a dat rezultatul sub forma

$$\varepsilon = \alpha\sigma$$

adică: deformaţia este proporţională cu rezistenţa. Aceasta este legea lui Hooke.

In practică se întrebuinţează un alt coeficient.

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Scanned with OKEN Scanner

care se numeşte *modul de elasticitate* sau coeficient de elasticitate. Aşa în cât legea lui Hooke se scrie obişnuit sub forma

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad , \quad \sigma = E\varepsilon$$

Coeficientul de elasticitate E se măsoară în kg/cm². Cu cât E este mai mare, cu atât ε este mai mic, deci corpurile puţin elastice, cu o deformaţie mai mică, au modul de elasticitate mare (oţelul $E = 2.000.000$ kg/cm²), corpurile foarte elastice, cu deformaţie mare, au modul de elasticitate mic (cureaua $E=$ 2.000 kg/cm²)

In mod analog, pentru lunecări, avem o relaţie asemănătoare între γ şi τ scriind

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad , \quad \tau = G\gamma$$

iar G este *coeficientul de elasticitate transversală* sau la lunecare şi se măsoară la fel în kg/cm².

Coeficienţii de elasticitate E şi G sunt cei mai importanţi coeficienţi, care ne dau mijlocul de a calcula rezistenţa cunoscând deformaţia şi invers.

Nu toate corpurile urmează legea lui Hooke şi nu înseamnă că oricare ar fi deformaţia ea este proporţională cu rezistenţa. De aceea s'a reluat studiul, făcându-se încercări cu diferite materiale şi stabilind deformaţiile ce le poate suferi corpul şi rezistenţele corespunzătoare.

Cum rezistenţele şi deformaţiile sunt mărimi dirijate, care pot varia în mărime şi direcţie, se face ipoteza, pentru a simplifica lucrurile, că avem corpuri la fel formate în toate direcţiile arătând aceleaşi proprietăţi elastice în toate direcţiile. Asemenea corpuri se zic *izotrope*. In aceste corpuri deformaţia corespunzătoare unei rezistenţe este aceiaşi, în orice direcţie ar lucra rezistenţa. Corpurile cari nu sunt izotrope se zic *anizotrope*. Unele prezintă diferite axe de izotropie, cum sunt cristalele, care arată, după diferite axe ale sistemului cristalin din care fac parte, proprietăţi elastice diferite.

6. **Curba caracteristică a materialelor ce ascultă de legea lui Hooke.** Aflarea relaţiei dintre rezistenţă şi deformaţie se face experimental pentru fiecare material în parte

supunând la încercare o probă în maşina de încercat. O asemenea maşină este aranjată în general pentru încercări la întindere, deşi putem face experienţa pentru ori-ce fel de încercări.

Din materialul de încercat se strunjeşte o bară de 20 mm diametru lucrată pe o lungime de 200 mm şi prevăzută cu două

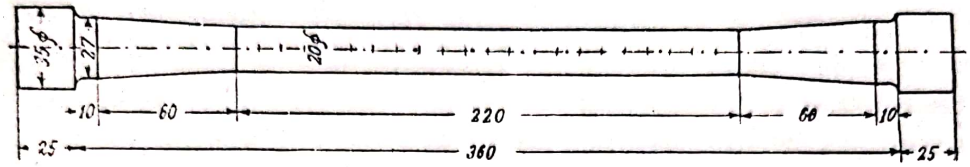


Fig. 22

capete. Aceste capete se aşează între cele două fălci ale maşinei de încercat şi bara este supusă la întindere. Forţa se măsoară cu ajutorul unui aparat, iar deformaţia se măsoară între două repere, însemnate la 200 mm. distanţă, şi care din cauza lungirii se depărtează. (fig. 22).

Când forţa este zero bara are o secţie Ω pe care o măsurăm şi lungimea l pe care o măsurăm între repere. Dacă mărim forţa încet, bara se va lungi. Citind forţa P la aparat vom afla rezistenţa corespunzătoare

$$\sigma = \frac{P}{\Omega}$$

Citind distanţa între repere nu vom mai găsi l ci o lungime mai mare l'. Cantitatea $\Delta l = l' - l$ este lungirea produsă, iar lungirea specifică este

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}$$

La fiecare forţă corespunde un σ şi un ε şi putem repeta această măsurare pentru diferite valori ale forţei P.

Pentru uşurinţă se reprezintă grafic aceste valori. Faţă de un sistem de axe se poartă în abscise valorile ε, în ordonate valorile σ (fig. 23). Pentru fiecare valoare a forţei P vom avea o pereche σ, ε, deci un punct. Punctele ce le obţinem pentru diferitele valori ale forţei P se găsesc pe o curbă, care se cheamă *curba caracteristică* a materialului şi care ne exprimă grafic relaţiile între rezistenţă şi deformaţie.

Pornind din origină, curba arată o porţiune de linie dreaptă, care corespunde legii de proporţionalitate, legea lui Hooke

Mai mult, dacă încărcăm sau descărcăm bara, ea revine la loc, deformaţia anulându-se în întregime, pentru ca la o nouă încărcare să crească iar până la acelaş punct.

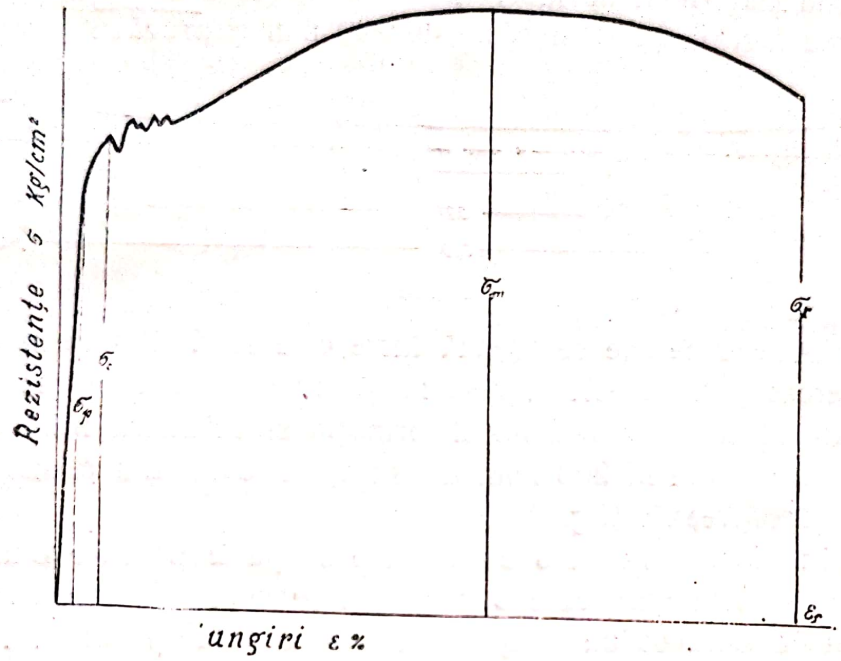


Fig. 23

Există o limită până la care se aplică legea lui Hooke, adică până la care curba caracteristică este o linie dreaptă şi aceasta se numeşte *limita de proporţionalitate* σ_p.

Mărind sarcina deformaţia începe să crească mai iute ca rezistenţa, aşa în cât curba se depărtează de linia dreaptă. Totuşi corpul se comportă tot în mod elastic, adică descărcându-l revine la forma dinnainte. Când sarcina creşte însă apar deformaţii care nu mai revin, aşa numite *deformaţii permanente*. Asemenea deformaţii apar şi la sarcini mai mici şi le putem descoperi cu mijloace mai fine de măsurat.

Mărind mai departe sarcina, deformaţia creşte aproape fără a mai mări rezistenţa, ceiace ne dă în curba caracteristică o porţiune orizontală.

Se zice că materialul curge şi limita de la care se produce acest fenomen este *limita de curgere* σ_c.

Apar în acest timp deformaţii permanente, care nu mai revin, şi cari dau corpului caracterul plasticităţii. Deformaţiile plastice se fac sub o încărcare mică şi fără schimbare însem-

nată a volumului, aşa în cât lungimea crescând se produce o gâtuire a barei, o contracţie transversală.

Fenomenul curgerei se manifestă printr'o schimbare a stării moleculare a corpului, dacă bara este şlefuită apar diferite crăpături foarte fine cari dau figuri ce fac un unghiu de 45° cu axa, dacă bara este laminată coaja de deasupra cade. In această porţiune măsurarea este îngreuiată şi traseul curbei caracteristice este nesigur. Am putea vorbi mai degrabă de două limite, una superioară şi alta inferioară, între care oscilează curba. La unele materiale limita de curgere nu este aşa de pronunţată.

Sporind încărcarea peste limita de curgere, echilibrul interior se restabileşte, rezistenţa şi deformaţia cresc mai departe. Dar din cauza deformaţiilor permanente creşterea acestora este mult mai mare ca a rezistenţelor şi obţinem porţiunea din curbă în care deformaţiile cresc foarte mult fără un spor mare de rezistenţă, curba se apropie de orizontală şi atingem *rezistenţa maximă* σ_{max}.

Contracţia barei se măreşte, bara se gâtue într'un punct unde secţia se micşorează foarte mult, rezistenţa scade, deformaţia creşte şi în fine bara se rupe la o valoare ce se numeşte *rezistenţa la rupere* σ_r.

Curba caracteristică se poate ridica prin puncte, dar maşinile de încercat au un aparat indicator cu care se înregistrează automat pe o bucată de hârtie curba caracteristică.

In practică avem nevoe de câteva date caracteristice care sunt:

Rezistenţa maximă care se măsoară citind la aparatul maşinei forţa maximă P_{max} şi raportând la secţia iniţială

$$\sigma_{max} = \frac{P_{max}}{\Omega} \text{ kg/cm}^2$$

Lungirea la rupere care se măsoară luând bucăţile rupte, punându-le cap la cap şi aflând lungimea între repere l_r şi raportând la lungimea iniţială l

$$\delta = \frac{l_r - l}{\Omega} 100\%$$

Contracţia la rupere care se măsoară luând secţia în lo-

cul unde s'a produs ruperea şi raportând la secţia iniţială

$$\psi = \frac{\Omega - \Omega_r}{\Omega} 100\%$$

Aceste date caracterizează materialul. Determinarea lor s'a făcut pentru majoritatea materialelor întrebuinţate de ingineri şi ele se găsesc date în manuale.

Importanţa acestor date se vede în caetele de sarcini care prevăd anumite valori pentru rezistenţă, lungire şi contracţie, pentru ca materialul să răspundă la nevoile noastre. Câte odată se prevede şi limita de curgere, care împreună cu rezistenţa ne dau sarcina ce o poate suporta materialul, pe când lungirea şi contracţia ne dau indicaţii asupra capacităţii lui de a suporta deformaţiile.

7. Contracţia transversală. Fenomenul gâtuirei barei se arată în mod pronunţat la rezistenţa maximă. Dar el se poate vedea în timpul încercării prin măsurarea diametrului, deoarece bara nu se poate lungi fără ca dimensia ei transversală să nu scadă. Acesta este fenomenul numit *contracţia transversală.*

Dacă bara este supusă la compresiune atunci ea se scurtează, dar această scurtare nu poate avea loc fără creşterea secţiei transversale, avem deci *umflare transversală.*

Există o legătură între lungirea axială şi contracţia transversală şi anume contracţia este o fracţie din lungire, adică

$$\beta = \frac{\varepsilon}{m}$$

în care m este *coeficientul de contracţie transversală,* numit şi coeficientul lui *Poisson.* S'a găsit că acest coeficient variază între 3 şi 10/3 pentru marea majoritate a materialelor.

In ipoteza că deformaţia s'ar face păstrând volumul constant, pentru un corp de lungime l şi dimensie transversală b, vom avea prin deformaţie

$$V = lb^2 = l(1+\varepsilon)\ b^2(1-\beta^2) = \text{const}$$
$$(1+\varepsilon)\ (1-\beta^2) = 1$$

şi neglijând produsele care sunt mici vom găsi

$$m = \frac{\varepsilon}{\beta} = 2$$

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul de contracţie transversală $m = 2$ caracterizează deci corpurile care se deformează fără a-şi schimba volumul; Sunt aşa numitele lichide incompresibile.

Pentru cazul $m = 3$ se vede că avem şi o variaţie de volum produsă în urma deformaţiilor.

Deformaţia axială se propagă deci în sens transversal, şi dacă corpul e izotrop, la fel în toate direcţiile. Dacă deci în sensul unei axe avem o rezistenţă σ, va corespunde în această direcţie o lungire ε, şi o contracţie transversală în celelalte sensuri β, dată de

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \beta = -\frac{\varepsilon}{m} = -\frac{\sigma}{mE}$$

Dacă ne opunem, împiedicând corpul de a lua această deformaţie, se vor naşte rezistenţe, care la rândul lor vor produce deformaţii în sens transversal.

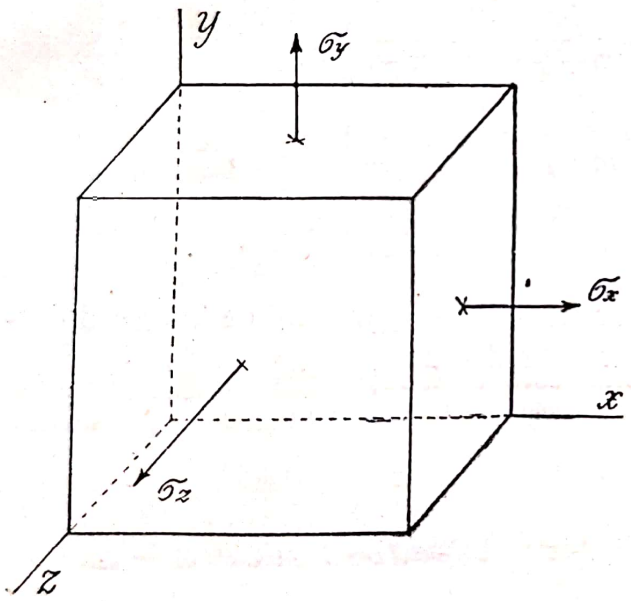


Fig. 24.

Să luăm un paralelipiped $dxdydz$ supus pe cele şase feţe la trei rezistenţe normale σ_1, σ_2, σ_3, după cele trei axe (fig. 24). Fiecare din aceste rezistenţe vor produce lungiri în sensul axelor respective şi contracţii în sens transversal date de coeficientul m. Ceiace măsurăm noi efectiv şi numim deformaţie după una din axe este rezultatul suprapunerii efectelor celor trei rezistenţe.

Vom avea după cele trei axe

	x	y	z
σ_1 produce	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\frac{\sigma_1}{mE}$	$-\frac{\sigma_1}{mE}$
σ_2 produce	$-\frac{\sigma_2}{mE}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\frac{\sigma_2}{mE}$

σ_3 produce $-\frac{\sigma_3}{mE}$ $-\frac{\sigma_3}{mE}$ $\frac{\sigma_3}{E}$

aşa în cât însumând după cele trei axe vom avea

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{m}\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}\right)$$

formule care ne dau legea lui Hooke generalizată, pentru cazul când lucrează mai multe rezistenţe.

Cunoscând deformaţiile ε_1, ε_2, ε_3 putem afla rezistenţele şi avem

$$\sigma_1 = \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right)$$

$$\sigma_3 = \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right)$$

Sub acţiunea acestor rezistenţe paralelipipedul se deformează. Volumul lui $V = dxdydz$ devine

$$V' = dx\ (1+\varepsilon_1)\ dy\ (1+\varepsilon_2)\ dz\ (1+\varepsilon_3)$$

iar variaţia volumului va fi

$$\varepsilon_v = \frac{V'-V}{V} = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\ (1+\varepsilon_3) - 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

In cazul când presiunea se transmite în toate direcţiile cu aceiaşi valoare, adică $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ şi rezultă

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\sigma}{E}\,\frac{m-2}{m}\ ,\quad \varepsilon_v = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \frac{3\sigma}{E}\,\frac{m-2}{m}$$

Se vede deci că şi în acest caz rezistenţa este proporţională cu deformaţia, cu variaţia volumului şi coeficientul k

$$\sigma = k\varepsilon,\ k = \frac{mE}{3(m-2)}$$

se numeşte *modul de compresiune* (al volumului).

Cazul $m = 2$ ne duce la deformaţii nule. Este cazul limită al lichidelor teoretice incompresibile.

8. **Lucrul mecanic de deformaţie.** Intinderea barei şi ruperea ei nu se poate face fără a cheltui un lucru mecanic. Acest lucru mecanic se înmagazinează în bară ca deformaţie şi este redat atunci când descărcăm bara şi ea revine la forma primitivă. Dacă mergem până la rupere nu mai putem regăsi lucrul mecanic, el se pierde.

In mecanică două forţe egale şi direct opuse îşi făceau echilibru. In rezistenţă corpul se deformează, avem deci o deformaţie, şi avem şi un lucru mecanic. Putem afla lucrul mecanic cheltuit, după metoda cunoscută, făcând produsul între forţă şi deplasare, lucru care se înmagazinează în bară sub formă de deformaţie şi-l aflăm făcând produsul între rezistenţă şi lungire. Acest produs îl vedem în diagramă (fig. 25) şi este dat de suprafaţa mărginită de curba caracteristică, axa absciselor şi ordonata extremă la rupere.

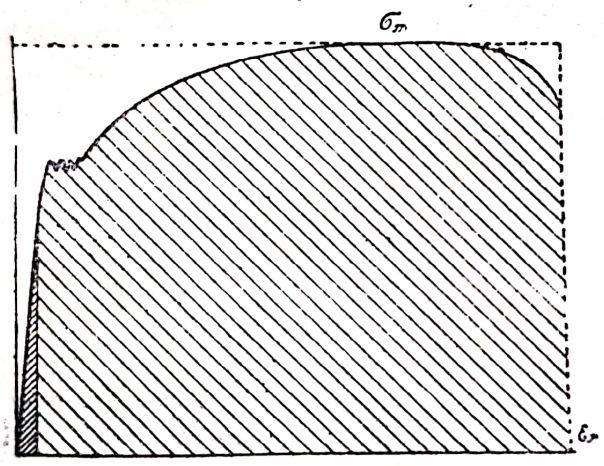


Fig. 25

Capacitatea materialului de a absorbi lucru mecanic este o proprietate importantă şi se măsoară prin acest lucru mecanic raportat la volumul bucăţii exprimându-se în kgcm/cm³.

In practică se ia în loc de suprafaţa curbei caracteristice suprafaţa dreptunghiului ce o închide $\sigma_{max} \times \varepsilon_r$.

O importanţă mare are lucrul mecanic elastic, care poate fi redat când descărcăm bara şi care este reprezentat prin suprafaţa triunghiului, întrucât avem o variaţie proporţională. Pentru unitatea de volum, adică un cm³ avem

$$L = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{E}$$

care se numeşte *lucrul specific de deformaţie.*

Coeficientul $^1/_2$ care apare acum în expresia lucrului mecanic, spre deosebire de modul cum calculăm în mecanică, se datoreşte faptului că forţa nu lucrează cu intensitatea ei finală, ci creşte de la zero până la valoarea ei.

In mod asemănător lucrul mecanic datorit rezistenţelor tangenţiale este

$$L = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

Pentru cazul rezistenţelor în trei direcţii vom putea scrie pentru deformaţia paralelipipedului

$$L = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right)$$

şi înlocuind pe $E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$ avem

$$L = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right)$$

dacă înlocuim pe $\sigma_1 = \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right)$

vom avea lucrul mecanic în funcţie de deformaţii.

$$L = \frac{Em}{2(m+1)}\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{\varepsilon_v^2}{m-2}\right)$$

9. Deformaţia elastică şi permanentă, domeniul elastic, domeniul deformaţiilor permanente. Incărcând bara cu o sarcină avem o deformaţie, care se anulează când sarcina încetează. Deformaţiile acestea care dispar odată cu sarcina se numesc *deformaţii elastice.*

Mărind sarcina, dela o anumită valoare bara nu mai revine la forma dinainte. Se produc deformaţii care nu se mai anulează atunci când încărcarea încetează. Acestea se numesc *deformaţii permanente.*

Lucrul mecanic de deformaţie cheltuit pentru a produce deformaţii elastice este dat înapoi atunci când sarcina încetează, bara revenind la forma ei ca un resort. Lucrul mecanic cheltuit pentru a produce deformaţii permanente este pierdut, el serveşte

Scanned with OKEN Scanner

în parte la schimbarea naturii corpului, parte se transformă în căldură. Deformaţiile permanente se acumulează până când conduc la rupere.

Se numeşte *limită de elasticitate* valoarea rezistenţei, până la care deformaţiile produse sunt elastice. Determinarea acestei limite este în funcţie de fineţea aparatelor de măsurat, căci deformaţia permanentă nu apare brusc, ci la început foarte mică şi neobservată creşte din ce în ce. S'a convenit deci să se numească limită de elasticitate valoarea rezistenţei ce corespunde unei deformaţii permanente de 0,01 % — 0,03 % alegându-se de preferinţă aceasta din urmă.

Să luăm o bară pe care o supunem la întindere cu sarcini pornind dela 0 şi măsurăm deformaţia. După fiecare încărcare revenim la 0 şi deformaţia se anulează.

Dacă încărcăm bara peste limita de elasticitate se nasc deformaţii permanente, la descărcare ele nu se anulează, curba nu mai revine în originea *0* ci în *0'*, *0 0'* este valoarea deformaţiei permanente (fig. 26).

Incărcând din nou bara, vom avea curba din *0'* tot o linie dreaptă, iar limita de elasticitate, ce o găsim este mai ridicată.

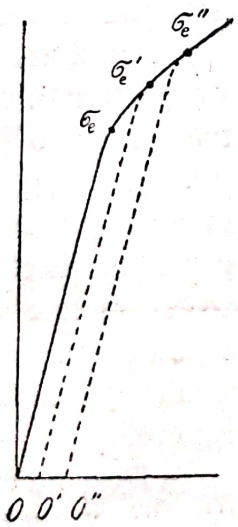


Fig. 26.

In acest mod prin încărcări succesive, putem limite limite de elasticitate, deformaţiile sub această limită devenind deformaţii elastice.

Prima valoare a limitei de elasticitate se numeşte *limita de elasticitate naturaiă.*

Ridicarea limitei de elasticitate nu poate fi mai mare decât limita de curgere, pe care în mod analog o definim ca rezistenţa ce corespunde unei deformaţii permanente de 0,2%.

Putem deci să schimbăm curba caracteristică a unui material, dându-i alte calităţi. Este ceiace se face în metalurgie, unde prin tratament mecanic, forjare, laminare, se schimbă calităţile materialului. Lucrul cheltuit sub formă mecanică sau termică se regăseşte astfel înmagazinat în proprietăţile elastice ale materialului.

O deformaţie este *plastică* atunci când corespunde unor rezistenţe peste limita de curgere. Deformaţiile plastice au valori mari pentru o creştere mică a rezistenţei, de aci numirea de

curgere. Prin ridicarea temperaturii se pot obţine proprietăţi plastice la metale, ceiace este întrebuinţat în prelucrarea la cald. Prin adausuri se obţine plasticitatea pentru prelucrare, de exemplu cu apă, la argilă, beton.

Limita de elasticitate, şi valoarea maximă, limita de curgere împart deci domeniul deformaţiilor în două regiuni. Domeniul elastic în care deformaţiile sunt elastice, în general foarte mici, şi domeniul deformaţiilor mari, permanente sau plastice. Toate calculele de rezistenţă se mărginesc la domeniul elastic unde legătura între rezistenţă şi deformaţie este dată de legea lui *Hooke*. Acum s'au introdus şi calculele în domeniul plastic, atât pentru a prevedea rezultatele la prelucrarea în stare plastică, ca la forjare, laminare, cât şi pentru dimensionarea pieselor încărcate peste limita de curgere.

10. **Curba caracteristică a materialelor ce nu ascultă de legea lui Hooke.** Sunt unele materiale precum pietrele, mortarele, cimentul, betonul, cureaua, textilele, cauciucul, fonta, care nu prezintă curba caracteristică pe care am văzut-o, şi în special, nu există proporţionalitate între rezistenţă şi deformaţii.

Supunând o probă dintr'un asemenea material la întindere sau compresiune, găsim o curbă care creşte mereu, fără a arăta proporţionalitatea, există o limită de curgere, uneori fără a apărea aşa de clar ca la metale şi curba creşte continuu până la rupere.

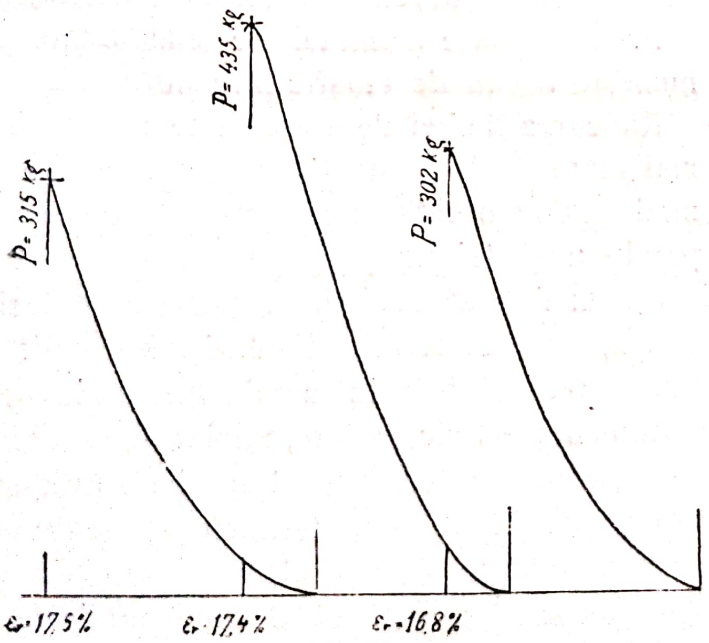


Fig. 27

Deşi nu avem proporţionalitate, totuşi, pentru uşurinţa calculului vom întrebuinţa şi în acest caz un coeficient de elasticitate E, admiţând că avem o variaţie după o

linie dreaptă. Uneori se ia un coeficient de elasticitate variabil, ceiace revine a înlocui curba printr'o serie de segmente de linii drepte. Valorile lui E sunt date în manuale.

In figură (fig. 27) se găsesc reprezentate o serie de curbe pentru funii de cânepă, pentru comparaţia rezistenţelor şi deformaţiilor. Nu se vede regiune de proporţionalitate şi s'a determinat forţa maximă la rupere şi lungirea la rupere.

11. Alte proprietăţi ale materialelor, tehnologia. Noi am cercetat în deaproape numai proprietăţile elastice şi legătura între rezistenţă şi deformaţie, deoarece acestea sunt folositoare pentru scopurile noastre. Dar pe lângă aceste proprietăţi sunt numeroase altele, ale diferitelor materiale, pe care trebue să le cunoaştem atunci când avem de lucrat cu ele.

Proprietăţile materialelor întrebuinţate în technică, cunoaşterea lor, pregătirea acestor materiale în vederea scopului, formează obiectul tehnologiei. Pentru diferitele materiale avem diferite ramuri: technologia materialelor de construcţie, a materialelor electrice, a metalelor, şi putem merge în detaliu pentru materialele întrebuinţate în aviaţie, în construcţiile navale, în industria chimică.

Cunoaşterea proprietăţilor materialelor se face prin încercare. Incercarea materialelor este un domeniu de cercetare foarte vast, dat fiind numărul mare de materiale şi de proprietăţi ale lor. Incercarea fizică predomină, fiind vorba de găsirea proprietăţilor fizice, dar cercetarea se ridică până la constituţia materialului, urmărind de a-i influenţa prin fabricaţie proprietăţile lui şi de a obţine calităţi de materiale mai corespunzătoare scopului.

Incepând cu încercarea pe care o face zidarul, frecând nisipul în palmă spre a vedea dacă este bun pentru mortar, trecând prin încercările la rupere în maşina de încercat, până la încercările cu raze Röntgen sau cercetările la ultramicroscop, toate mijloacele sunt întrebuinţate pentru a pătrunde în constituţia materialului, şi pentru a putea cunoaşte şi fabrica un material bun.

Cunoaşterea proprietăţilor materialului cu care lucrăm este o condiţie necesară pentru inginer şi pe această cunoaştere se reazemă siguranţa pe care el o are în proectarea construcţiunilor.

Scanned with OKEN Scanner

Cap. II. Ruperea materialelor.

12. Mecanismul ruperii. In calculele noastre căutăm să stabilim care ar fi sarcina maximă pe care o poate suporta o construcţie. In special, trebue să încărcăm aşa fel construcţia, în cât să nu întrecem rezistenţa la rupere a materialului. Purtarea materialului nu este însă elastică şi supusă unei legi simple de cât până la limita de proporţionalitate, până la care ne servim de legea lui Hooke. Mai departe avem deformaţii permanente, care ne duc la rupere. Trebue să vedem cum se produce ruperea, pentru a căuta să rămânem cât mai departe de această eventualitate.

Nu toate corpurile au aceiaşi capacitate de a lua deformaţii. Sunt unele corpuri, în general metalele. care pot lua deformaţii destul de mari, ele se zic *tenace*, pe când altele sunt *fragile*, adică deformaţiile ce le pot lua sunt mici. Intre aceste două stări sunt poziţii intermediare.

După deformaţia elastică unde avem o legătură între rezistenţe şi deformaţii, urmează creşterea deformaţiilor, şi se produc lunecări, deplasări fără schimbare de volum, care duc la starea numită plastică. Urmează ruperea, fără însă ca să putem da, ca în domeniul elastic o anumită valoare pentru rezistenţa sau pentru deformaţia la rupere.

In experienţa la întindere vedem cum bara se lungeşte, secţia ei se contractă, gâtuirea se localizează într'o parte, apoi bara se rupe. Secţia de rupere depinde de material. Astfel fierul are o suprafaţă de rupere aproape plană, cu aspect grăunţos, dovedind ruperea prin smulgere, iar pe margine arată un fel de crater, cu feţe înclinate la 45°, şi lustruite, dovedind ruperea

Scanned with OKEN Scanner

prin lunecare. Când oţelul e dur, secţia de rupere este netă, fără crater. Lemnul, la care se rupe fie-care fibră în parte, are o suprafaţă de rupere cu totul neregulată, cu aşchii.

Noi definim prin această experienţă rezistenţa, lungirea şi contracţia la rupere.

Totuşi putem obţine în anumite cazuri deformaţii mult mai mari ca acestea. Prin laminarea sau tragerea unui fir, putem să-i dăm deformaţii mult mai mari, repetate, fără ca să-l aducem până la rupere. Deci nu putem spune că este o valoare fixă a rezistenţei sau lungirii, la care se produce ruperea.

In experienţa la compresiune nu mai putem produce ruperea prin deformaţie, căci proba se turteşte fără a se rupe. La un cub de beton se observă că se despart feţele laterale sub plane la 45°, formându-se două piramide. (fig. 28). Cubul nu se rupe deci prin o secţie normală, ci prin lunecarea materialului după plane la 45°.

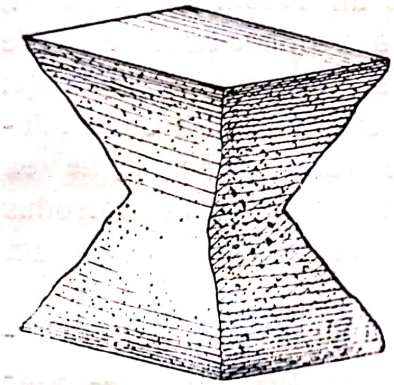


Fig. 28.

Dacă am împiedica această lunecare prin o apăsare laterală, comprimând corpul într'o matriţă, (fig. 29) nu mai putem avea rupere. Se aduce astfel materialul la limita de curgere în stare plastică, dar nu putem produce ruperea, materialul neputând eşi afară. S'au făcut asemenea experienţe cu materiale fragile, marmoră, grezie, care au devenit plastice, luând deformaţii mari, fără rupere.

Iată deci că se pot atinge valori foarte mari ale rezistenţei şi deformaţiei, fără a se produce ruperea.

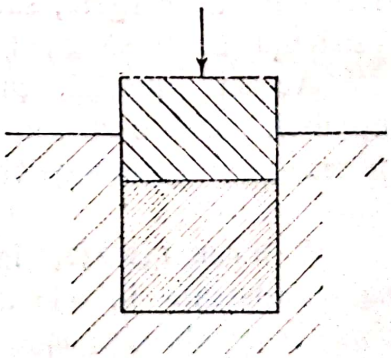


Fig. 29.

Putem însă produce ruperea şi fără deformaţie sau cu o deformaţie foarte mică. Astfel putem rupe o sfoară foarte uşor printr'o lovitură bruscă, pe când prin încărcare înceată ne-ar trebui o forţă mult mai mare. Asemenea cazuri se prezintă des în practică unde avem sarcini dinamice, ca la organele de

maşini. In asemenea încărcări trebue avut în vedere şi timpul în care lucrează, sau viteza cu care lucrează forţa.

In fine nu este nevoe de deformaţii permanente, ci putem produce ruperea chiar în regiunea elastică prin încărcări repetate. Experienţa arată că dacă o piesă este supusă la încărcări mici dar alternate, variind de la 0 la P, sau de la $+P$ la $-P$, se produce ruperea după un număr foarte mare de încărcări, deşi sarcina P nu ar putea singură produce ruperea, având o valoare mai mică decât rezistenţa la rupere.

13. **Ipotezele de rupere.** După cum se vede, experienţa ne arată că ruperea unui material este un fenomen complicat, şi nu putem spune în fiecare caz cum se produce exact. Părerile au fost deci împărţite dacă ruperea se datorează rezistenţei maxime la rupere fie ea σ_{max} sau τ_{max}, sau dacă din contra deformaţia maximă este aceia care joacă rolul principal, fie ea ε_{max} sau γ_{max}. Cum însă era nevoe de reguli s'au introdus diferite ipoteze, pe care le întrebuinţăm în calcule, după cum este nevoe.

Prima ipoteză, este pentru cazul când avem o sigură rezistenţă, şi este cea mai simplă, cu care s'a început să se calculeze piesele. Această ipoteză ne spune că bara se rupe, când rezistenţa în interior a atins rezistenţa la rupere a materialului. Pentru a calcula piesa, va trebui să ne aranjăm în aşa fel ca rezistenţa în piesă să fie mai mică decât rezistenţa la rupere a materialului $\sigma_{max} < \sigma_r$.

In unele cazuri când nu avem în vedere ruperea ci urmărim limita de curgere, sau limita de elasticitate. se prevede ca rezistenţa în piesă să fie mai mică decât limita respectivă.

Această ipoteză, care explică destul de mulţumitor cazul întinderii unei bare sub o sarcină statică, este în contrazicere cu rezultatul experienţelor la compresiune sau pentru încărcările dinamice.

A doua ipoteză, întrebuinţată în cazul când avem mai multe rezistenţe, în cele trei direcţii, este că bara se rupe atunci când deformaţia cea mai mare atinge deformaţia de rupere. Ori deformaţia într'o direcţie oarecare este influenţată de rezistenţele în cele trei direcţii, şi dintre toate deformaţiile ar trebui să o alegem pe cea maximă. Ar trebui deci să luăm

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{m} < \varepsilon_r$$

In loc de a lucra cu deformaţiile se transformă aceste relaţii trecând la rezistenţe. Ne închipuim deci o rezistenţă, care ar produce deformaţia de mai sus

$$\sigma_{red} = E\varepsilon_{max} = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} < \sigma_r$$

şi această rezistenţă, închipuită de noi şi dedusă din calcule, se numeşte *rezistenţă redusă.*

Această ipoteză a fost aplicată în diferite cazuri, dar ea nu explică toate lucrurile şi este în contrazicere cu rezultatele unor experienţe.

Astfel în cazul încărcărilor numai cu rezistenţe tangenţiale τ, vom găsi în două direcţii normale rezistenţele $\sigma_1 = +\tau, \sigma_2 = -\tau$ şi deci vom găsi rezistenţa redusă

$$\sigma_{red} = \frac{m+1}{m}\tau$$

Ar urma deci că $\tau = \frac{m}{m+1}\sigma = 0{,}77\,\sigma$, pe când prin experienţe numeroase se găseşte $\tau = 0{,}57\ \sigma$.

Föppl a închipuit o experienţă în care a încărcat cubul pe două direcţii, şi a observat că ruperea se produce la aceiaşi rezistenţă ca şi în cazul când cubul este încărcat numai după o direcţie. Totuşi dacă am lua rezistenţa redusă atunci

$$\sigma_{red} = \sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y$$

deci ar urma să găsim o rezistenţă mai mică.

De altfel ruperea la compresiune prin lunecări pe feţe înclinate la 45°, lasă bănuiala că nu rezistenţele normale sau deformaţiile axiale hotărăsc ruperea, ci rezistenţele tangenţiale sau lunecările.

Mohr a căutat să lămurească nepotrivirile prin a treia ipoteză, care explică ruperea prin depăşirea rezistenţelor tangenţiale τ, care după cum am văzut sunt date de diferenţele între rezistenţele normale. In cazul a trei rezistenţe în spaţiu σ_1, σ_2, σ_3, hotărăşte diferenţa cea mai mare $\sigma_1 - \sigma_3$, aşa încât rezistenţa mijlocie σ_2 nu joacă nici un rol.

Scanned with OKEN Scanner

Toate stările de rezistenţe combinate reprezentate de cercurile lui *Mohr* pentru care nu se produce ruperea ar fi tangente la o curbă, numită de el curba caracteristică (fig. 30). Toată greutatea este de a găsi această curbă, şi aplicarea practică a teoriei lui *Mohr* se izbeşte tocmai de această greutate.

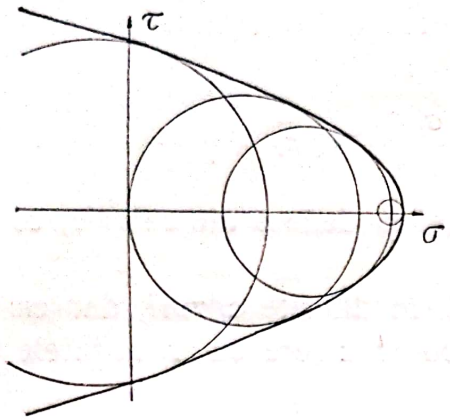


Fig. 30.

Dacă luăm un corp ca oţelul, care are aceeaşi rezistenţă la întindere ca şi la compresiune, cercurile corespunzătoare sunt egale, şi curba caracteristică ar fi dată de două drepte paralele, tangente la cercuri. (fig. 31).

Ceiace ne-ar] da rezultatul $\tau = \frac{1}{2}\sigma$ verificat de experienţele făcute de *Guest* şi prevăzut de *Mohr*.

Deşi teoria lui *Mohr* nu s'a putut introduce larg în practică, din cauză că nu s'au putut găsi curbele caracteristice ale tuturor materialelor pe cale experimentală, totuşi ea a găsit primire largă, dând posibilitatea de a explica ruperea. Este admis că ruperea se face prin lunecare, mai cu seamă pentru materialele casante cum este betonul, piatra. La celelalte materiale se observă ruperi combinate prin smulgere şi lunecare.

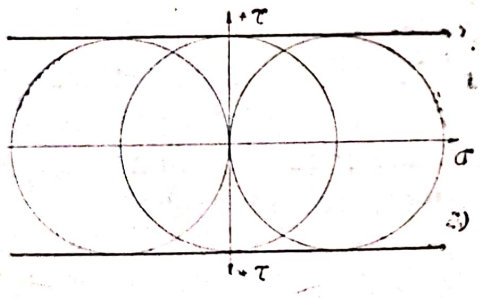


Fig. 31.

O a patra ipoteză este aceia în care alegem lucrul mecanic de deformaţie ca criteriu de comparaţie, măsurând sarcina ce o suportă materialul prin lucrul mecanic înmagazinat. Experienţele au dovedit că un cub poate fi supus din toate părţile la presiuni foarte mari şi înmagazinează astfel un lucru mecanic însemnat, fără a se produce ruperea. Ceiace ce duce la rupere este partea de lucru mecanic care servă la schimbarea formei, pe când aceia ce schimbă volumul poate avea valori mari.

Dacă deci luăm un paralelipiped supus după cele trei axe

la rezistenţe σ_1, σ_2, σ_3 având deformaţiile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ vom considera deformaţia produsă de o rezistenţă medie p

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

care ne va da lucrul mecanic

$$L' = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

sau înlocuind

$$E\ (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{m-2}{m} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

găsim

$$L' = \frac{m-2}{6\ m\ E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

care ar corespunde cu lucrul mecanic înmagazinat în corp pentru variaţia volumului, şi pe care îl scădem din lucrul mecanic total

$$L = \frac{1}{2E} \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right\}$$

şi ne dă

$$L'' = \frac{m+1}{3\ m\ E} \left\{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \right\}$$

$$= \frac{m+1}{6\ m\ E} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}$$

obţinând astfel lucrul mecanic cheltuit pentru schimbarea formei.

Huber a emis cel dintâi ipoteza că acest lucru mecanic trebue să aibă o anumită valoare pentru ca corpul să nu se rupă. Dacă comparăm acest lucru mecanic cu acel dela întindere, când avem o singură rezistenţă $\sigma_1 = \sigma$, celelalte fiind nule atunci

$$L'' = \frac{m+1}{3\ m\ E_1} \sigma^2$$

care comparate ne dau

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma^3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Comparând cu cazul tăierii $\sigma_1 = +\tau_1, \sigma_2 = -\tau$ găsim

$$L'' = \frac{m+1}{mE}\sigma^2$$

şi deci

$$\frac{m+1}{mE}\tau^2 = \frac{m+1}{3mE}\sigma^2 \quad , \quad \tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = 0{,}57\,\sigma$$

valoare care se apropie mai mult de rezultatele experienţelor.

Această ipoteză ne duce la formule mai complicate şi totuşi nu poate lămuri toate fenomenele ruperii.

Noi vom întrebuinţa în calcule prima ipoteză, care ne dă rezultate bune în cazurile simple. Vom trece la a doua ipoteză pentru câteva probleme mai complicate. Vom întrebuinţa în câteva aplicaţiuni şi ipoteza lucrului mecanic.

S'au mai făcut şi alte ipoteze, care se întrebuinţează pentru probleme speciale şi pe care noi nu le mai amintim aici.

14. Sarcini dinamice. Ipotezele de mai sus nu lămuresc definitiv problema ruperii şi urmând aceste calcule nu avem întotdeauna garanţia că ruperea nu se va produce. Fiecare ştie cum putem rupe foarte uşor o sârmă prin îndoire într'un sens şi în celălalt, sau o sfoară printr'o smucire bruscă, pe când ar fi greu să le rupem printr'o încărcare înceată.

In cazul când avem sarcini des repetate sau care lucrează dinamic, cu viteză, ruperea se produce la o valoare mai mică.

Primul care a făcut experienţe pentru aceste încercări a fost *Wöhler* (1870), care a stabilit câteva rezultate.

O piesă supusă la încărcări de acelaş sens des repetate se rupe la o rezistenţă mai mică decât rezistenţa la rupere a materialului sub sarcina statică.

Există o anumită valoare pe care *Wöhler* o numeşte *rezistenţă primitivă*, la care nu se produce ruperea, chiar dacă repetăm sarcina de milioane de ori. El dă acest rezultat sub forma unei curbe (fig. 32), care arată sarcina la care se produce ruperea după un număr de lovituri.

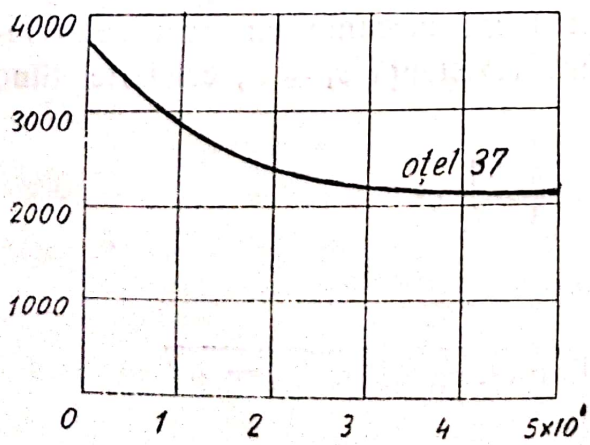


Fig. 32

Dacă rezistenţele variază ca semn fiind alter-

native, atunci ele oscilează şi sunt cuprinse între o valoare inferioară σ_1 şi una superioară σ_2 (fig. 33).

Vom putea defini atunci o valoare medie σ_m, şi o valoare oscilantă σ_a

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}$$

aşa în cât rezistenţa dinamică o putem scrie $\sigma_d = \sigma_m \pm \sigma_a$

O reprezentare grafică este dată de purtarea acestor valori într'o diagramă (fig. 33) în care în abscisă reprezentăm rezistenţa medie σ_m, iar în ordonată rezistenţa oscilantă σ_a.

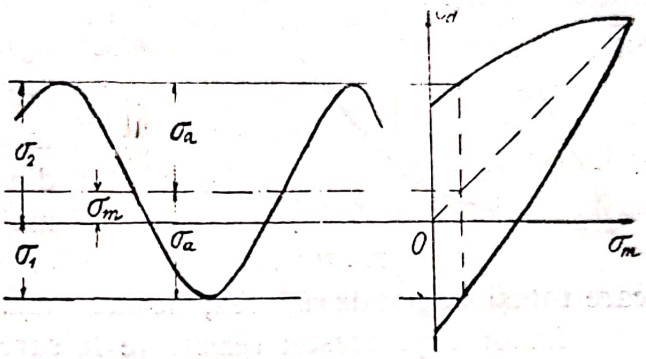


Fig. 33

Dacă $\sigma_m = 0$, adică încărcările oscilează între două limite egale şi de semne contrare, avem $\sigma_d = \pm \sigma_a$ şi se numeşte rezistenţa la sarcini oscilante valoarea până la care materialul rezistă fără a se rupe, când sarcina se repetă de numeroase ori.

Dacă rezistenţa inferioară este nulă $\sigma_1 = 0$, avem

$\sigma_d = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm \sigma_2)$ şi se vorbeşte de rezistenţa la sarcini variate, valoarea până la care materialul rezistă fără a se rupe, când sarcina se repetă de mai multe ori.

Cazul limită când rezistenţa sporeşte până la limita de curgere, când materialul nu mai poate suporta oscilaţii, este dat de o sarcină permanentă, care poate dura timp îndelungat, fără a produce ruperea.

Se numeşte *rezistenţă dinamică* valoarea până la care materialul rezistă, atunci când sarcina se repetă de numeroase ori, rezistenţa oscilând între două limite σ_2 la partea superioară şi σ_1 la partea inferioară.

Dacă facem încercările şi la compresiune, obţinem atunci un contur (fig. 34) în care rezistenţele la întindere pot fi diferite

de rezistenţele la compresiune. La rezistenţele superioare acest contur este limitat la partea superioară de limita de curgere, iar pe margini de rezistenţele maxime şi minime. Pentru valorile cari cad în interiorul acestui contur nu se produce ruperea şi se vede că aceste valori sunt mai mici decât rezistenţa la rupere prin încărcare statică. Valorile din exteriorul conturului, mai mici decât rezistenţa la încărcare statică, dar care totuşi ne pot da ruperea, ne dau cazul de *rupere prin obosire.*

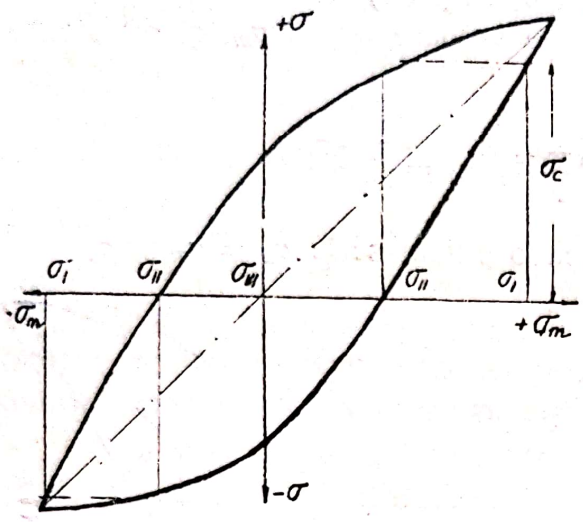


Fig. 34

Importanţa acestei rezistenţe la sarcini oscilante este mare, căci ne aduce ruperea la o valoare a rezistenţei cu mult mai mică de cât limita de curgere, sau limita de elasticitate a materialului. Ruperea prin obosire se produce fără deformaţii mari şi adeseori brusc.

15. **Coeficient de siguranţă, rezistenţe admisibile.** In practica construcţiilor este foarte important să ştim până la ce limită să încărcăm materialul. Limita extremă până la care materialul rezistă este rezistenţa la rupere. Dar până la rupere materialul are deformaţii mari de cari în orice caz trebueşte să ne ferim, aşa încât nu este bine să depăşim limita de curgere. Nu este însă prudent să avem chiar deformaţii permanente, care adunându-se sub sarcini des repetate, ori cât ar fi de mici conduc la ruperea piesei. Deci limita de elasticitate este o valoare practică importantă, pe care nu trebue să o întrecem.

Limita până la care încărcăm o construcţie atârnă şi de felul construcţiei. Sunt construcţii care durează timp îndelungat, cum ar fi construcţiile civile şi la care limita încărcării materialului este destul de joasă. Sunt altele, cum ar fi gurile de foc, la care materialul este foarte încărcat, şi după un număr de lovituri ţeava este scoasă din serviciu. Şi modul cum lucrează sarcinile trebue să fie luat în considerare. Pentru sarcina statică putem merge până la limita de curgere a materialului. Pentru

Scanned with OKEN Scanner

sarcini dinamice, oscilante, des repetate sau cu şocuri, se iau alte limite. Şi forma piesei are importanţă, căci din această formă rezultă anumite concentrări ale rezistenţelor în unele puncte şi pentru a ţine seamă de ele, se scoboară limita până la care se încarcă materialul.

Nu putem însă lăsa ca fiecare să-şi aleagă arbitrar rezistenţele. ci sunt norme bine reglementate, care fixează rezistenţele ce trebuesc respectate de constructori.

Condiţia ce trebue îndeplinită de ori ce construcţie pentru siguranţa ei, este ca rezistenţa ce se naşte într'o parte a ei sub acţiunea sarcinilor exterioare, să rămână sub o anumită valoare σ_a care este *rezistenţa admisibilă*. Această rezistenţă admisibilă până la care putem încărca construcţia ţine seamă de diferitele cazuri în care se poate afla ea, de natura materialului şi de modul cum lucrează sarcina.

In practică se vorbeşte de *coeficientul de siguranţă* care este fracţia cu care am micşorat rezistenţa la rupere

$$s = \frac{\sigma_r}{\sigma_a}$$

şi reprezintă prin încărcarea mai mică ce o dăm construcţiei, siguranţa noastră faţă de rupere.

Rezistenţele admisibile sunt valorile limite până la care ne este permis să încărcăm materialul, Ele sunt stabilite şi trecute în normele, prescripţiile, regulamentele şi manualele inginereşti.

Dăm mai jos câteva tab'ouri cu rezistenţele admisibile. La diferite capitole se vor da rezistenţele admisibile pentru cazuri speciale.

Scanned with OKEN Scanner

Rezistenţe admisibile pentru maşini în kg/mm².

Sarcina		*O* 37	*O* 50	*Ot* 45	*F* 14	*F* 26	Duralumin
Întindere	I	10 —15	14 —21	10 —15	3,5— 4,5	6,5— 8,5	11 —16
	II	6,5— 9,5	9 —13,5	6,5— 9,5	2,7— 3,7	5 — 6,7	5 — 7
	III	4,5 — 7	6,5 — 9,5	4,5— 3	2 — 3	3,5— 5	3,5— 5,5
Compresiune	I	10 —15	1,4—21	11 —16,5	8,5—11,5	16 —21,5	11 —16
	II	6,5— 9,5	9 —13,5	7 —10,5	5,5— 7,5	10 —17,5	5 — 7
	III	4,5— 7	6,5— 9,5	4,5— 4	2 — 3	3 — 5	3,5— 5,5
Încovoere	I	11,0—16,5	15 —22	11,0—16,5	5 — 7	10 —13,5	12 —17,5
	II	7 —10,5	10 —15	7 —10,6	3,5— 5	6,5— 9	5 — 7
	III	5 —7,5	7 —10,5	5 — 7,5	2,5—3,5	4 — 9	3,5— 5,5
Răsucire	I	6,5—9,5	8,5—12,5	6,5— 9,5	4 — 5,5	7,5—10	6,5— 9,5
	II	4 — 6	5,5— 8,5	4 — 6	3 — 4	5,5— 7,5	3,2— 4,8
	III	3 — 4,5	4 — 6	3 — 4,5	2 — 3	3,5— 6	2,2—32

Observaţii. Unele materiale au aceleaşi rezistenţe admisibile la întindere şi compresiune. Fonta, Oţelul turnat, au rezistenţe mai mari la compresiune.

Rezistenţa la încovoere este mai mare ca cea la întindere, la răsucire mai mică, pentru toate.

Rezistenţe admisibile pentru construcţii în kg/cm.²

Construcţia	Sarcina	Pentru grinzi, zăbrele sau stâlpi				
		O—00	*O* — 37		*O* — 52	
			1	2	1	2
Grinzi	Intindere, compr. încovoiere	1200	1400	1600	2106	2400
	Tăiere	960	1020	1280	1620	1920
Nituri	Tăiere	1200	1400	1600	2100	2400
	Presiune pe gaură	2400	2800	3200	4206	4800
Buloane (păsuite)	Tăiere	960	1120	1280	1620	1920
	Presiune pe gaură	2400	2800	3200	4200	4800
	Intindere	850	1000	1100	1500	1700
Buloane (brute)	Tăiere	1000	1000	1100	1000	1100
	Presiune pe gaură	1000	1600	1800	1600	1800
	Intindere	1090	1000	1100	1000	1100

Scanned with OKEN Scanner

Rezistenţe admisibile pentru reazeme şi valţuri în kg/cm².

Sarcina	Fontă F 14		Oţel turnat Ot 52		Oţel turnat	
	1	2	1	2	1	2
Incovoiere, tensiune,	450	500	1800	2000	2000	2000
Compresiune	900	1000				
Compresiune	1000	1100	1800	2000	2000	2200

Rezistenţe admisibile pentru fontă F 14 în construcţii în kg/cm²

Construcţia	Compresiune	Incovoiere	
		Compr.	Tensiune
Diferite piese	900	600	300
Coloane	900	900	450

Rezistenţe admisibile pentru lemn în kg/cm².

Sarcina	Brad	Stejar fag
Compresiune	80	100
Compresiune	20	40
Incovoiere	100	110
Tăiere	12	20
Coef. elast. *E*	100000	125000

Rezistenţe admisibile pentru suduri.

Cusătura	Incărcarea	Rezistenţa admisibilă	Observaţiuni
Sudura în cap	Intindere	0,75	Din σ a materialului de bază
	Compresiune	0,85	
	Incovoiere	0,80	
	Tăiere	0,65	
Sudura în colţ	Toate felurile	0,65	

Scanned with OKEN Scanner

Rezistenţe admisibile pentru beton şi beton armat în kg/cm².

Betonul	Stâlpi compresiune	Grinzi încovoere	Rezistenţa la rupere pe cuburi la 28 zile
Cu ciment obişnuit	35	40	120
Cu ciment special	40	50	160

Rezistenţe admisibile pentru zidării, în kg/cm².

Felul zidăriei	Rezistenţa
Granit, sienit, zidărie regulată	50
Grezie,	25
Zidărie de cărămidă, cl. II	7 — 8
Zidărie de cărămidă, cl. I	10—14

Rezistenţe admisibile pentru terenul de fundaţie în kg/cm².

Felul terenului	Rezistenţa
Nisip slab	1,5—2,5
Teren bun	2,5—5,0
Teren argilos	4,0—5,0
Pietriş	6,5—8,5
Stâncă	9—20

Scanned with OKEN Scanner

Cap. III. Rezistenţele simple.

§ 1. Intinderea

16. **Ipoteza secţiilor plane şi repartiţia rezistenţelor dedusă din experienţă.** Dacă pe o bară cilindrică supusă la întindere, trasăm nişte cercuri conţinute în plane paralele între ele şi normale pe axa barei, observăm că după întindere cercurile trasate rămân tot cercuri, şi tot în plane paralele între ele. Singura deformaţie care s'a produs este că distanţa între cercuri s'a mărit şi din cauza contracţiei transversale diametrul lor s'a micşorat. Dacă totuşi planele rămân tot paralele înseamnă că diferitele fibre au căpătat lungiri egale şi în consecinţă avem şi rezistenţele egale. Zicem deci că rezistenţele sunt aceleaşi pe toată suprafaţa secţiei sau că sunt *uniform distribuite.*

Ipoteza pe care o punem deci la baza calculelor noastre este că secţiile plane înainte rămân plane şi după deformaţie, ipoteză dedusă din experienţă şi care atrage concluzia că rezistenţele sunt uniform distribuite pe secţie.

Dacă atunci P este tensiunea în bară, şi Ω este secţia barei în cm², urmează că pe fie-care cm² vom avea

$$\sigma = \frac{P}{\Omega}$$

formulă care ne dă rezistenţa la întindere în o piesă.

Metoda prin care am obţinut rezistenţa σ este numită *metoda secţiilor plane,* căci am dedus rezistenţa făcând o secţie plană prin bară. Forţa P care figurează în formulă este dată, sau o aflăm după metodele de calcul din mecanică.

Scanned with OKEN Scanner

17. Rezistenţa într'o secţie înclinată. Dacă facem în bară o secţie înclinată pe axă cu un unghiu α, urmează să aflăm valoarea rezistenţelor ce se nasc în această secţie.

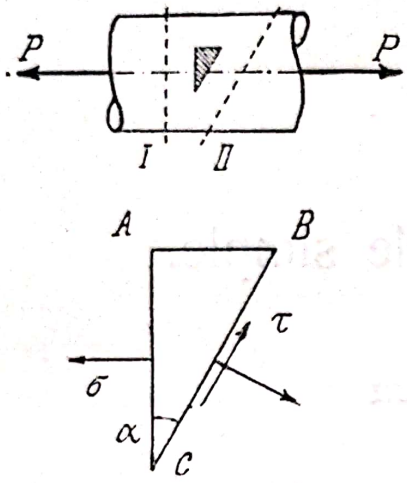


Fig. 35

Considerăm în grosimea barei, un element prizmatic având o latură AC paralelă cu o secţie normală, şi în care deci lucrează rezistenţa σ, determinată mai sus, şi cealaltă latură BC paralelă cu secţia înclinată în care ia naştere o rezistenţă necunoscută, pe care ne-o închipuim cu cele două componente normală σ' şi tangenţială τ'.

Acest element trebue să fie în echilibru sub acţiunea forţelor ce lucrează asupra lui, iar forţele sunt rezistenţele înmulţite cu suprafeţele pe care lucrează. Scriind deci echilibrul în direcţia planului înclinat şi normal pe el, avem admiţând că suprafaţa $BC = 1$ cm²:

$$\sigma' . \ 1 = \sigma \cos \alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau' . \ 1 = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2 \alpha$$

Se vede de aci că σ' este totdeauna mai mic de cât σ, atingând valoarea maximă pentru $\alpha = 0$, adică în o secţie normală, pe când τ' atinge maximul său pentru $\alpha = 45^0$ şi avem

$$\tau'_{\substack{max \\ \alpha=45^0}} = \frac{\sigma}{2}$$

Secţia cea mai defavorabilă pentru întindere este deci secţia normală, după care se produce ruperea.

18. Calculul deformaţiei. Bara de lungime l, supusă la întindere, se va lungi cu o cantitate Δl. Avem lungirea specifică

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

după legea lui Hooke, avem însă

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{E\Omega}$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{\Omega E}$$

formulă care ne dă deformaţia suferită de bară, măsurată în cm.

Exemplu. O bară de fier e supusă la o tensiune $P = 3000$ kg, iar rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 600$ kg/cm².

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{3000}{600} = 5 \text{ cm}^2$$

dacă bara are o lungime de 1 m, deformaţia produsă va fi

$$\Delta l = \frac{Pl}{\Omega E} = \frac{3000 \times 100}{5 \times 2.000\,000} = 0{,}03 \text{ cm}$$

19. **Lucrul mecanic de deformaţie.** Dacă considerăm în bara noastră întinsă un element de volum, un cub cu latura 1 cm, el va fi supus pe două feţe opuse la rezistenţa σ, şi se va lungi cu cantitatea ε. Lucrul mecanic ce se înmagazinează în acest element, sau *lucrul mecanic specific de deformaţie* va fi

$$\frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$

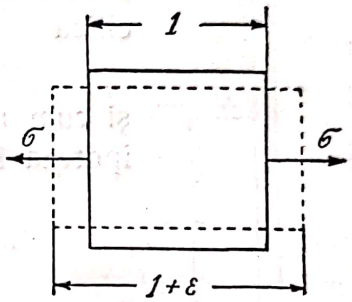


Fig. 36.

acest lucru mecanic este tocmai cel reprezentat de diagrama din fig. 25 şi cuprins între curba caracteristică şi axa lungirilor.

Pentru întreaga bară σ fiind constant va trebui să înmulţim cu volumul şi vom avea

$$L = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

iar dacă σ nu ar fi constant am scrie

$$L = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

In cazul întinderii avem

$$L = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{1}{2E} \frac{P^2}{\Omega^2} \Omega l = \frac{1}{2} P \frac{Pl}{\Omega E} = \frac{1}{2} P \Delta l$$

regăsim deci lucrul mecanic exterior care, după cum ştim, trebue să fie acelaşi cu lucrul mecanic de deformaţie înmagazinat în bară.

Lucrul specific se mai poate scrie

$$\frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

20. Calculul pieselor la întindere când ţinem cont de greutatea proprie. Dacă avem o bară lungă, de a cărei greutate G trebue să ţinem seamă, supusă la capăt la tensiunea P, vom avea la capătul de jos numai tensiunea P, iar la cel de sus $P+G$. Nu mai avem aşa dar aceeaşi rezistenţă dealungul barei, şi va trebui să aflăm cum variază în fiecare secţie.

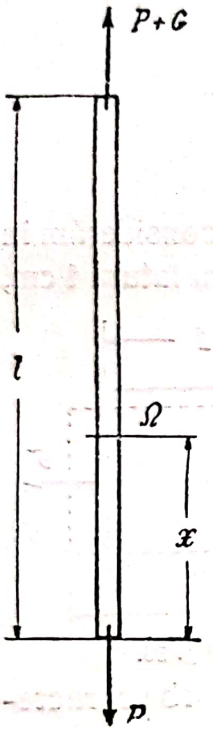


Fig. 37

Dacă considerăm o secţie la distanţa x de la capăt, în această secţie lucrează o forţă $P+G_x$, G_x fiind greutatea porţiunii considerate. Putem scrie această forţă, γ fiind greutatea specifică

$$P+\gamma\Omega x$$

şi cum rezistenţa este uniform distribuită după ipoteza făcută avem

$$\sigma_x = \frac{P+\gamma\Omega x}{\Omega}$$

Rezistenţa variază de la o secţie la alta şi este maximă în secţia de sus unde $x=l$.

Dacă ni se cere să dimensionăm bara, aşa ca să reziste la o forţă P oare-care, vom alege secţia cea mai defavorabilă şi vom scoate valoarea

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\sigma_a - \gamma l}$$

în care σ_a este rezistenţa admisibilă.

Pentru calculul lungirii nu mai putem aplica metoda şi formula stabilită la nr. 18 pentru că rezistenţa variind, variază şi lungirea. Trebue deci să aflăm lungirea unui element din bară situat la o distanţă oare-care x.

Acest element e supus la rezistenţa σ_x şi lungimea lui fiind dx se va lungi cu

$$\frac{\sigma_x\, dx}{E} = \frac{P+\gamma\,\Omega\, x}{\Omega\, E}\, dx$$

pentru întreaga bară vom însuma lungirea diferitelor elemente

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P+\gamma\,\Omega\, x}{\Omega E}\, dx = \frac{l}{\Omega E}\left(P+\frac{G}{2}\right)$$

se vede că deformaţia este aceiaşi ca şi cum am adăuga la P, jumătate din sarcina proprie $\frac{G}{2}$.

Dacă bara este lungă, diferenţa de rezistenţe la cele două capete este mare, ceeace nu e convenabil, materialul nu e bine utilizat. Se face atunci secţia variabilă. In acest caz la distanţa x avem secţia Ω_x, iar forţa ce lucrează în această secţie este

$$P + G_x = P\gamma\int_0^x \Omega_x\, dx$$

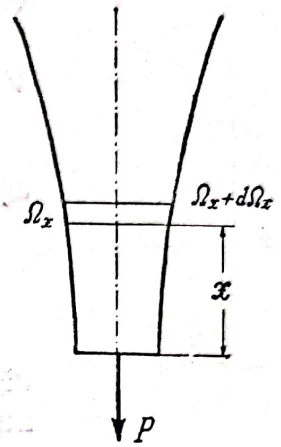


Fig. 38

trebue în acest caz să cunoaştem cum variază Ω_x dealungul barei pentru a putea efectua integrala.

21. Bara de egală rezistenţă. Cel mai avantajos ar fi atunci când am varia secţia aşa fel ca rezistenţa să fie aceiaşi pe toată bara. Dacă considerăm un element din o asemenea bară, situat la distanţa x şi de grosime dx el va fi supus pe cele două feţe Ω_x şi $\Omega_x + d\Omega_x$ la aceiaşi rezistenţă σ. Scriind echilibrul avem

$$\sigma(\Omega_x + d\Omega_x) = \sigma\Omega_x + \gamma\Omega_x\, dx$$

de unde scoatem

$$\frac{d\Omega_x}{\Omega_x} = \frac{\gamma}{\sigma}\, dx$$

ecuaţie a cărei integrală este cunoscută, şi pe care o scrim trecând la funcţia exponenţială

$$\Omega_x = \Omega_0 e^{\frac{\gamma}{\sigma}x} = \frac{P}{\sigma}\cdot e^{\frac{\gamma}{\sigma}x}$$

Lungirea acestui element este

$$\Delta dx = \frac{\sigma}{E}\, dx$$

rezistenţa fiind constantă,

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\sigma}{E}\, dx = \frac{\sigma l}{E}$$

Lucrul mecanic de deformaţie înmagazinat în bară este

$$L = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

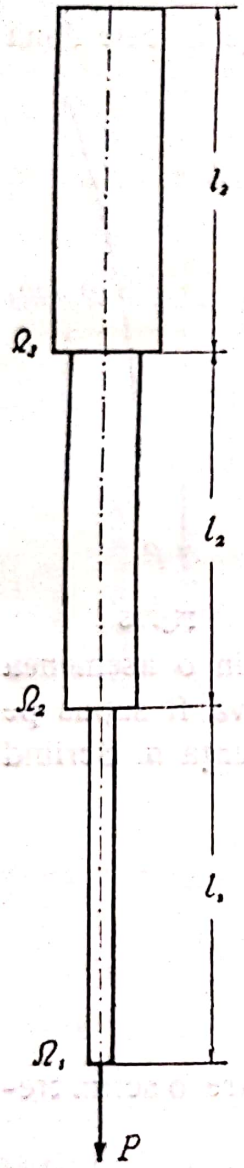


Fig. 39

volumul îl aflăm prin integrare

$$V = \int_0^l \Omega_x \, dx = \frac{P}{\sigma} \int_0^l e^{\frac{\gamma}{\sigma} x} \, dx = \frac{P}{\sigma}\left(e^{\frac{\gamma}{\sigma}x} - 1\right)$$

aşa încât

$$L = \frac{\sigma^2}{2E} \frac{P}{\sigma}\left(e^{\frac{\gamma}{\sigma}x} - 1\right)$$

In practică este incomod şi costisitor să dăm unei bare forma de egală rezistenţă. Se face atunci din bucăţi, secţia periculoasă a fiecăreia urmând să aibă rezistenţa admisibilă dată. Începând calculul de jos, vom avea aplicând formula

$$\Omega_1 = \frac{P}{\sigma - \gamma l_1}$$

pentru bucata a doua forţa care lucrează la capătul ei este

$$P + \gamma \Omega_1 l_1 = P + \gamma l_1 \frac{P}{\sigma - \gamma l_1}$$

ceeace aplicând încă odată formula ne dă

$$\Omega_2 = \frac{\sigma P}{(\sigma - \gamma l_1)(\sigma - \gamma l_2)}$$

repetând acelaşi mers găsim

$$\Omega_3 = \frac{\sigma_2 P}{(\sigma - \gamma l_1)(\sigma - \gamma l_2)(\sigma - \gamma l_3)}$$

22. Aplicaţiuni la întindere. Calculele precedente le aplicăm de câte ori recunoaştem că avem întindere. Vom arăta câteva exemple.

Calculul unui cablu de cânepă. Secţia unui asemenea cablu nu este omogenă, fiind compusă din fire toarse în funii. Se ia de obicei

$$\Omega = 0{,}62 \frac{\pi d^2}{4}$$

şi atunci sarcina ce o poate suporta cablul este dată de formula

$$P = \Omega\, \sigma_a - \Omega\, l\, \gamma$$

Exemplu. Un cablu de cânepă al cărui diametru este de $d=45$ mm, are greutatea $p = \gamma\Omega = 1{,}70$ km/ml şi suportă

$$P = 120 \times 0{,}62 \times 15{,}90 - 30 \times 1{,}70 = 1123 \text{ kg}$$

pentru o lungime de 30 m.

Calculul unui cablu de oţel. Secţia este formată din fire de oţel, care sunt împletite împreună cu câte o inimă de cânepă.

Avem deci două materiale, cu proprietăţi diferite care însă trebuie să lucreze împreună. Dacă Ω_1, E_1, σ_1 sunt pentru oţel şi Ω_2, E_2, σ_2 pentru cânepă vom scri că deformaţiile sunt aceleaşi pentru cele două materiale,

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

Sarcina pe care o poate suporta cablul este dată de

$$P + l\,(\Omega_1 \gamma_1 + \Omega_2 \gamma_2) = \sigma_1\, \Omega_1 + \sigma_2\, \Omega_2$$

putem nota ca mai sus greutatea cablului pe metru liniar cu p, şi înlocuind şi rezistenţele avem

$$P + lp = \sigma_1 \left[\Omega_1 + \frac{E_2}{E_1}\, \Omega_2\right]$$

pentru cazul nostru avem

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{7500}{2200000} = \frac{1}{290}$$

deci o cantitate mică pe care de obicei o neglijăm scriind

$$P = \sigma_1\, \Omega_1 - lp$$

Exemplu. Un cablu format din 6 frânghii cu câte 7 fire de 2 mm, cu inimă de cânepă, avem

$$\Omega_1 = 6 \times 7 \times 3{,}14 = 131{,}8 \text{ mm}^2$$

şi cum greutatea proprie este $p = 1{,}30$ kg/ml avem pentru rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 2500$ şi pentru o lungime de 150 m,

$$P = 2500 \times 1{,}318 - 150 \times 1{,}30 = 3095 \text{ kg.}$$

Dar cablul este în mişcare, sarcinile lucrează dinamic, şi cablul însuşi posedă o acceleraţie. Rezistenţele deci se vor mări.

Să considerăm un cablu de lungime l care ridică o cuşcă

de greutate P. Presupunem pornirea din stare de repaos. Cuşca nu se va mişca până când cablul nu s'a lungit cu cantitatea

$$\Delta l_P + \Delta l_G$$

corespunzătoare cu sarcina $P + G$.

Pentru a ridica cuşca, trebue să-i dăm o acceleraţie, adică să întroducem o forţă care va produce o nouă lungire a cablului Δl_p, şi fiind-că la început există o diferenţă de viteză între capătul de sus al cablului şi cuşcă, adică cuşca are o viteză relativă faţă de capătul de sus al cablului, rezultă o nouă lungire Δl_s şi deci noi rezistenţe. Lungirea totală a cablului se compune deci din

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_G + \Delta l_p + \Delta l_s$$

şi la care corespunde un spor de rezistenţă. Dacă nu punem cablul cu precauţie în mişcare se poate produce ruperea prin o aplicare bruscă a sarcinei.

Să calculăm rezistenţa produsă de acceleraţia p. La început sarcina era $P + G$, şi pentru a-i da o acceleraţie p, trebue să o sporim cu o forţă $(P + G)\frac{p}{g}$, aşa că sarcina ce va lucra va fi

$$(G + P)\left(1 + \frac{p}{g}\right)$$

rezultă că şi rezistenţa totală va fi

$$\sigma = (\sigma_P + \sigma_G)\left(1 + \frac{p}{g}\right)$$

De obicei avem în mediu $p = 1{,}5$ m/sec² şi deci

$$\frac{p}{g} = \frac{1{,}5}{9{,}81} = 0{,}153$$

şi rezistenţa devine

$$\sigma = 1{,}15\,(\sigma_P + \sigma_G)$$

care ne spune că rezistenţa s'a sporit cu 15%.

Exemplu. $P = 7800$ kg, $l = 1000$ m, $\sigma_a = 2400$. Calculul static ne dă

$$n\,\delta^2 = \frac{4P}{\pi\,(\sigma_a - \gamma l)} = \frac{4 \times 7800}{3{,}14\,(2400 - 785)} \cong 6{,}13 \text{ cm}^2$$

Alegem pentru $n = 6 \,.\, 16$ deci

$$\delta = \sqrt{\frac{6{,}13}{6 \times 16}} = 0{,}253 \text{ cm.}$$

Vom alege 6 . 16 Φ 2,6 care are d=37 mm, greutatea pe ml g=4,85 kg, iar sarcina de rupere P_r = 61170 kg.

Cablul nostru suportă 7800+4850 = 12650 deci coeficientul de siguranţă este

$$s = \frac{61170}{12650} \cong 4{,}8$$

dacă sporim sarcina cu 15% avem

$$s = \frac{61770}{12650 \times 1{,}15} \cong 4{,}2$$

Din cauza lungirei cablului cuşca rămâne în urmă, având o viteză relativă faţă de extremitatea cablului, Pentru a-i da aceeaşi acceleraţie trebue să-i dăm un spor de forţă, care produce lungirea Δl_s şi rezistenţa σ_s.

Pentru a calcula această rezistenţă aplicăm teorema energiei şi avem

$$\frac{M v^2}{2} = \frac{\sigma_s^2}{2E} V$$

$$\sigma_s = v \sqrt{\frac{P}{2g} \frac{2E}{V}} = v \sqrt{\frac{P E}{g l \Omega}}$$

aşa încât rezistenţa totală produsă în cablu este

$$\sigma_{tot} = (\sigma_P + \sigma_G) \left(1 + \frac{p}{g}\right) + v \sqrt{\frac{P E}{g l \Omega}}$$

în ceea ce priveşte viteza v, ea depinde pe modul de manevrare al cuştii.

Calculul curelelor. Transmisiunea forţei prin curele, se face prin aderenţa între curea şi roată. Această aderenţă datorită frecării, este ajutată de tensiunea iniţială ce se dă curelei şi care o apasă pe roată.

Raportul între tensiunile firelor este

$$\frac{T_1}{T} \leq e^{f\alpha}$$

în care α este unghiul pe care e aplicată cureaua iar f este coeficientul de frecare.

De obicei această relaţie care are loc la limită pentru ca să nu se producă alunecarea se scrie sub forma

$$\frac{T_1}{T} = k\, e^{f\alpha}$$

în care $k = 0{,}8$, iar $f = 0{,}28$ pentru curele vechi, $f = 0{,}16$ pentru o curea nouă.

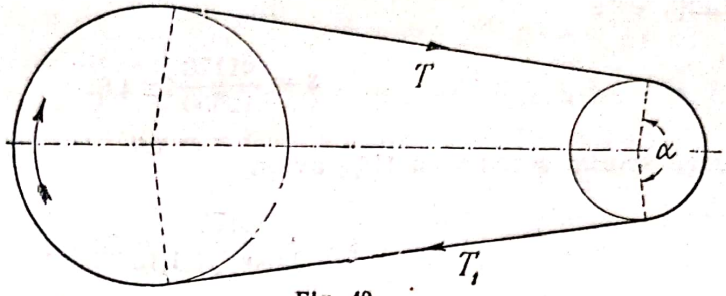


Fig. 40.

In poziţia din figură partea de jos a curelei trage, iar partea de sus e purtată. Avem deci $T_1 \geq T$ şi anume

$$T_1 = T k\, e^{f\alpha}$$

Trebue însă ca cureaua să transmită N cai puterea necesară, cu n învârtituri pe minut. Forţa care lucrează la periferia roţii este diferenţa între tensiuni, deci

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{T_1 - T}{75} v$$

de unde

$$P = T_1 - T = \frac{75\,N}{v} = \frac{75 \,.\, 60 \,.\, N}{2\pi n r}$$

din relaţia de aderenţă scoatem

$$T_1 = P \frac{k\, e^{f\alpha}}{k\, e^{f\alpha} - 1}$$

$$T = P \frac{1}{k\, e^{f\alpha} - 1}$$

cu care calculăm secţia necesară.

Tensiunea iniţială fiind T_0, vom avea

$$T_1 - T_0 = T_0 - T$$

deci

$$T_0 = \frac{T_1 + T}{2}$$

Când cureaua roteşte cu iuţeală mare, intră în joc forţa centrifugă, care dă o rezistenţă suplimentară. Avem

$$\frac{mv^2}{g} = 2N\sin\frac{d\alpha}{2} = N\,d\alpha$$

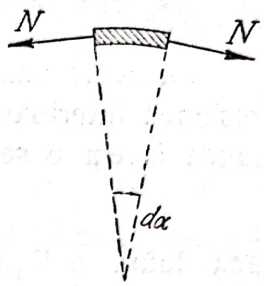


Fig. 41.

or dacă p este greutatea curelei pe m.

$$m = \frac{p\,r\,d\alpha}{g}$$

şi deci

$$N = \frac{p}{g}v^2$$

rezultat pe care îl vom găsi şi mai departe, la calculul volanului, căci dacă scrim $p = \Omega\gamma$, avem

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} = \frac{\gamma}{g}v^2$$

adică rezistenţa nu depinde de cât de viteză.

Pentru curea $\gamma = 0.9 - 1$ deci avem

pentru	10 m/sec	$\sigma = 1{,}01$ kg/cm²
	20	$\sigma = 4{,}04$
	40	$\sigma = 16{,}16$

se vede deci că rezistenţa aceasta suplimentară creşte şi devine importantă pentru iuţelile mari. Cum rezistenţa este independentă de dimensiunile curelei, se poate ţine cont scăzându-se de la început din rezistenţa admisibilă.

Exemplu. Să se calculeze cureaua care transmite $N = 100$ cai cu o viteză $v = 15$ m/sec. Vom avea

$$P = \frac{75\,N}{v} = \frac{75 \times 100}{15} = 500 \text{ kg.}$$

Luând cazul că cele două ramuri sunt orizontale vom avea $\alpha = \pi$ şi deci

$$T_1 = P\frac{kef\alpha}{kef\alpha - 1} = 100\frac{0{,}8e^{0{,}28\,\pi}}{0{,}8e^{0{,}28\,\pi} - 1} = 1038 \text{ kg.}$$

Viteza fiind mare trebue să scădem rezistenţa suplimentară datorită forţei centrifuge.

$$\sigma' = \frac{\gamma}{g}v^2 = \frac{1}{9{,}81}\frac{1500^2}{1000} = 2{,}29 \text{ kg/cm}^2$$

Luăm ca rezistenţă admisibilă $\sigma_a = 32$ kg/cm² deci

$$\Omega_{nec} = \frac{T_1}{\sigma_a - \sigma'} = \frac{10{,}38}{32 - 2{,}29} = 34{,}9 \text{ cm}^2$$

Alegem o curea dublă de 10 mm grosime şi 350 mm lăţime.

Calculul unui cazan. Pereţii cazanului având de suportat presiunea interioară p, lucrează la întindere. Pentru a afla tensiunea facem o secţie, şi găsim

$$2T = pD$$

dacă luăm o lăţime egală cu unitatea. Rezistenţa va fi atunci

$$\sigma = \frac{T}{\Omega} = \frac{pD}{2h}$$

Cazanul se poate însă rupe şi în o secţie normală. Forţa

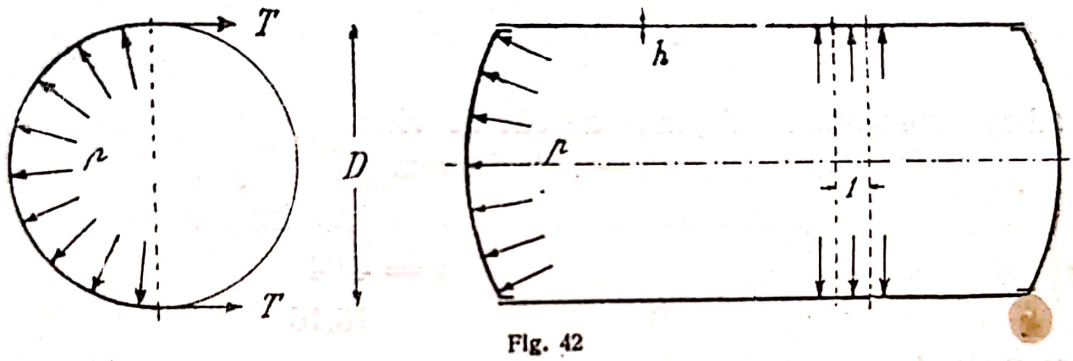


Fig. 42

care întinde cazanul e în acest caz presiunea pe funduri

$$P = \frac{\pi D^2}{4} p$$

şi rezistenţa este

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} = \frac{\frac{\pi D^2}{4} p}{\pi D h} = \frac{pD}{4h}$$

adică jumătate din cazul întâi, ceeace ne arată că, totdeauna cazanul se va rupe după o generatoare.

In practică cazanul se face din mai multe table care trebuesc nituite între ele, deci găurite. Dacă t este distanţa între două nituri, lăţimea tablei este numai $t-d$ scăzând gaura de nit. Trebue deci să sporim grosimea în acest raport şi să luăm

$$h = \frac{pD}{2\sigma_a} \frac{t}{t-d}$$

Calculul unui volan. Pentru simplificare reducem volanul la o coroană circulară, secţia fiind Ω, şi neglijăm braţele. Sub influenţa rotaţiei, se naşte forţa centrifugă, care supune volanul la întindere.

Pentru un element corespunzător unghiului la centru $d\alpha$, vom avea

$$C = mR\omega^2 = \frac{\Omega R d\alpha\, \gamma}{g} R\omega^2$$

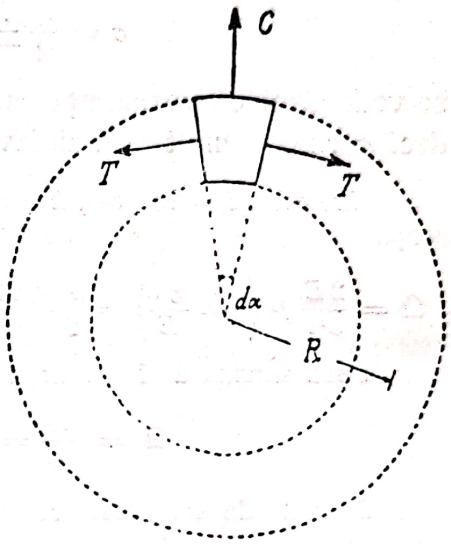


Fig. 43

Pe de altă parte echilibrul ne dă

$$C = 2T \sin\frac{d\alpha}{2} = Td\alpha$$

şi atunci rezistenţa în volan va fi

$$\sigma = \frac{T}{\Omega} = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2 = \frac{\gamma}{g} V^2$$

Rezistenţa nu depinde deci de secţie ci numai de viteză. Ori cât vom îngroşa secţia nu ajutăm nimic dacă viteza este prea mare.

Volanul se toarnă de obicei din fontă. Pentru $\sigma_a = 200, \gamma = 7{,}25$, găsim viteza maximă ce o poate atinge volanul

$$V = \sqrt{\frac{\sigma g}{\gamma}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 9{,}81}{\frac{7{,}25}{1000}}} = 52 \text{ m/sec.}$$

Solicitarea dinamică. In caz când sarcinile lucrează brusc, sau cu şoc, valoarea rezistenţelor este mult mai mare. Să considerăm o bară AB, supusă la întindere prin o greutate P, care cade de la o înălţime h. Din cauza şocului bara se va lungi, dar energia cinetică va întreţine mişcarea până când rezistenţele care cresc mereu se vor opune şi vor aduce bara înapoi. Vom avea deci o serie de oscilaţii.

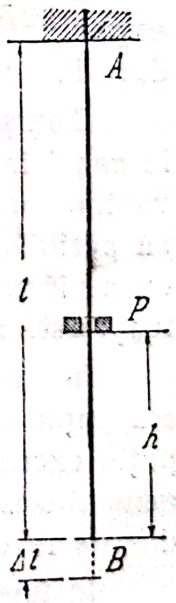


Fig. 44

Putem atunci scrie

$$P(h + \Delta l) = \frac{\sigma^2}{2E} V$$

adică lucrul mecanic cheltuit se înmagazinează în bară ca lucru mecanic de deformaţie. Deducem

$$P\left(h+\frac{\sigma l}{E}\right)=\frac{\sigma^2}{2E}\Omega l$$

$$\sigma=\frac{P}{\Omega}\pm\sqrt{\frac{P^2}{\Omega^2}+\frac{Ph}{\Omega l}2E}$$

se vede deci că rezistenţa este mai mare de cât în cazul static, deci corpul e mult mai defavorabil solicitat.

Exemplu. $l=100$ cm, $h=50$ cm, P 100 kg, $\sigma=2500$. Vom calcula secţia

$$\Omega=\frac{2E}{\sigma^2 l}P\left(h+\frac{\sigma l}{E}\right)=\frac{2\times 2000000}{2500^2\times 100}100\left(50+\frac{2500\times 100}{2000000}\right)=3{,}21\ \text{cm}^2$$

Dacă sarcina ar fi lucrat static am fi avut

$$\Omega=\frac{P}{\sigma}=\frac{100}{2500}=0{,}04\ \text{cm}^2$$

Se vede de aci deosebirea mare între cele două sarcini.

§ 2. Compresiunea.

23. **Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă.** Este aceeaşi ca şi în cazul întinderei, şi ne conduce la aceeaşi concluzie, că rezistenţele sunt uniform distribuite.

Totuşi este o mare deosibire între întindere şi compresiune. In cazul întinderii avem echilibru stabil. Piesa chiar strâmbă se va îndrepta sub acţiunea tensiunii, piesa fiind lungă rezistenţele au posibilitatea să devină uniform distribuite, secţiile fiind mici nu ne îndepărtăm prea mult de realitate prin ipoteza că rezistenţa este uniform distribuită.

In cazul compresiunii avem echilibru nestabil. Dacă piesa era puţin strâmbă ea se va îndoi şi mai tare, dacă forţa era puţin excentrică această excentricitate va creşte, piesele sunt în general scurte şi secţiile mari, aşa că de multe ori avem rezistenţe diferite în diferitele puncte ale secţiei, prea depărtate între ele.

In fine dacă piesa e prea lungă, experienţa arată că întotdeauna ea se încovoae, şi deci nu mai lucrează la compresiune. Acest fenomen de încovoere se numeşte *flambaj* şi ne vom ocupa

în detaliu cu el mai târziu. Ca regulă practică nu este permis să calculăm o piesă la compresiune, când are o lungime mare.

24. **Rezistenţe, deformaţii.** Ipoteza fiind aceeaşi ajungem la aceleaşi formule

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} \quad , \quad \Delta l = \frac{Pl}{\Omega E}$$

In o secţie înclinată avem

$$\sigma' = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau' = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$

Rezistenţa la lunecare capătă aci o importanţă mare, multe materiale posedând o rezistenţă ridicată la compresiune normală, dar fiind foarte slabe la lunecarea transversală,

$$\underset{\alpha=45^0}{\tau_{max}} = \frac{\sigma}{2}$$

şi trebue să verificăm ca această lunecare să nu fie întrecută.

Lucrul mecanic de deformaţie este

$$L = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{1}{2} P \Delta l$$

In caz când ţinem cont de greutatea proprie se aplică aceleaşi formule ca la întindere.

Exemplu. Un zid de $1^1/_2$ cărămizi, cu lăţimea $b = 0{,}48$ cm, înalt de $h = 6{,}5$ m, suportă o sarcină $P = 4$ tone/ml.

Vom aduna la sarcina P şi greutatea proprie a zidului, determinând rezistenţa în secţia de jos, care este secţia cea mai defavorabil încărcată.

$$P = 4000 \text{ kg.}$$
$$G = \gamma \Omega l = 1500 \times 0{,}48 \times 6{,}5 = 4000$$

Rezistenţa zidăriei va fi deci

$$\sigma = \frac{P + G}{\Omega} = \frac{8680}{48 \times 100} = 1{,}31 \text{ kg/cm}^2$$

Dacă luăm un teren slab, pentru care avem o rezistenţă admisibilă mică $\sigma_a = 1{,}5$ kg/cm², vom calcula fundaţia zidului

$$\Omega_{neces} = \frac{P+G}{\sigma_a} = \frac{8680}{1{,}5} = 5780 \text{ cm}^2$$

deci fundaţia ar trebui să aibă 0,60 m.

Vom face o fundaţie de beton de 1,20 înălţime şi de 0,75 lăţime pentru a ţine cont şi de greutatea betonului care este

$$B = 2500 \times 1{,}20 \times 0{,}75 = 2250 \text{ kg},$$

ceea ce ne dă pe teren

$$\sigma = \frac{8680 + 2250}{75 \times 100} = 1{,}45 \text{ kg/cm}^2$$

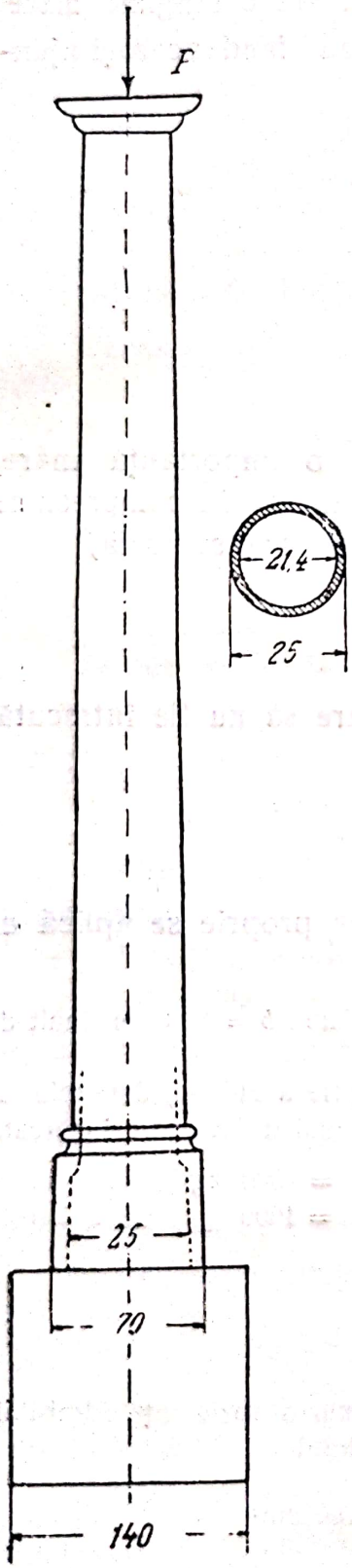


Fig. 45

25. Calculul unei coloane. Coloanele se fac de obicei din fontă, turnându-se cu o secţie inelară. Să luăm o coloană $D = 250$ mm, $d = 214$ mm, iar înălţimea $h = 4{,}00$ m.

Sarcina ce o poate suporta

$$P = \sigma_a \Omega$$

pentru rezistenţa fontei $\sigma_a = 600$, şi deci

$$P = \sigma_a \Omega = 600 \times 131{,}0 = 78{,}6 \ t.$$

Coloana este rezemată pe un bloc de piatră, care având $\sigma_a = 20$, va trebui să dăm coloanei la bază o secţie mai mare

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{78600}{25} = 3144 \text{ cm}^2$$

secţia e însă inelară

$$\Omega_n = \frac{\pi}{4}\left(d^2 - 25^2\right) = 3144$$

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi} 3144 + 25^2} = 68{,}0 \cong 70 \text{ cm}.$$

Blocul de piatră reazemă la rândul lui pe teren a cărui rezistenţă este $\sigma_a = 4$. Deci

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{78600}{4} = 19650 \text{ cm}^2$$

sau presupunând baza patrat

$$a = 140 \text{ cm}.$$

In fine în interiorul blocului de piatră se pot naşte lunecări după plane la 45°. Dacă h este înălţimea blocului, suprafaţa corespunzătoare este $ah\sqrt{2}$, aşa că avem

$$a h \sqrt{2} = \frac{P}{\tau_a}$$

$$h = \frac{P}{\tau_a a\sqrt{2}} = \frac{78600}{10 \times 140 \times \sqrt{2}} = 39{,}8 \text{ cm.}$$

Înălţimea minimă este astfel calculată şi putem face o înălţime convenabilă după adâncimea la care aşezăm fundaţia.

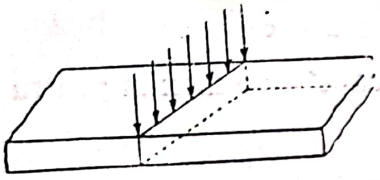
Am neglijat greutatea proprie a coloanei şi a fundaţiei. Dacă luăm $h = 0{,}6$ m vom avea

$$91{,}0 \times 4{,}0 + 1{,}40 \times 1{,}40 \times 0{,}6 \times 2200 = 2971 \text{ kg.}$$

care s'ar adăuga la sarcina $P = 78{;}6$ tone.

§ 3. Tăierea.

26. **Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă.** Am văzut (nr. 2) că în cazul tăierii se produc rezistenţe tangenţiale τ. Dacă reluăm experienţa tablei tăiate cu foarfeca, presupunând că forţa tăietoare T lucrează dealungul lamei foarfecei, şi probabil în mod uniform, este la locul ei ipoteza că şi rezistenţele ce se nasc vor fi uniform distribuite. Vom lua deci



$$\tau = \frac{T}{\Omega}$$

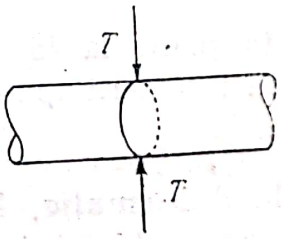


Fig. 46

In caz când tăiem o bară rotundă, forţa nu mai este uniform distribuită, şi nu mai putem lua aceiaşi ipoteză. Vom putea atunci să descompunem pe τ în două componente, τ_x, τ_y şi să scriem

$$\int \tau_x \, d\Omega = T$$
$$\int \tau_y \, d\Omega = 0$$

Avem astfel două necunoscute, şi de obicei se neglijează τ_x, rămânând să calculăm numai pe τ_y la care după cum ştim va corespunde o altă rezistenţă egală în planul longitudinal al bucăţii.

Repartiţia rezistenţelor este atunci alta, şi vom calcula mai târziu valoarea rezistenţelor la lunecare longitudinală. Pentru secţii mici vom păstra însă ipoteza rezistenţelor uniform repartizate.

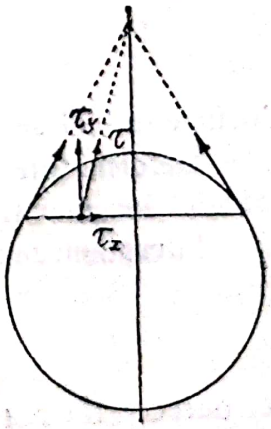


Fig. 47

Exemplu. Să se calculeze forţa necesară pentru a face într'o tablă de grosime $\delta = 12$ mm, o gaură de nit de diametru $d = 26$ mm.

Rezistenţa la rupere pentru tăiere o luăm

$$\tau_r = 0{,}87 \times 4000 \cong 3500 \text{ kg/cm}$$

aşa în cât forţa necesară va fi

$$P = \pi d . \delta . \tau_r = 8{,}168 \times 1{,}2 \times 3500 \cong 34000 \text{ kg}$$

Nu putem deci calcula cu rezistenţele uniform distribuite de cât în unele cazuri; aplicaţii vom face la calculul îmbinărilor.

27. **Rezistenţa în o secţie înclinată.** Dacă considerăm în grosimea plăcii un element prismatic, acesta va fi supus pe cele două feţe la rezistenţa τ, iar în faţa înclinată vom avea o rezistenţa oare care, descompusă în două componente σ' şi τ'. Vom avea

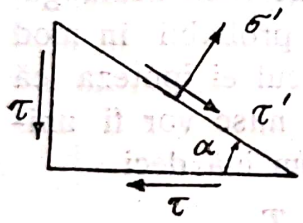


Fig. 41.

$$\sigma' = 2\tau \cos\alpha \sin\alpha$$
$$\tau' = \tau \cos^2\alpha - \tau \sin^2\alpha$$

Se vede deci că σ' este maxim pentru $\alpha = 45°$ şi anume

$$\sigma'_{\substack{max \\ \alpha=45°}} = \tau$$

Pentru un corp supus deci la tăiere, apar în plane la 45° rezistenţe normele maxime, după cum în cazul întinderii apăreau în plane la 45° lunecări tangenţiale maxime.

28. **Deformaţii şi lucru mecanic de deformaţie.** Deformaţia ce se produce la tăiere este variaţia unghiului drept, dată de legea lui Hooke.

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Coeficientul G se numeşte coeficient de elasticitate transversală.

Deformaţiile fiind mici, nu prezintă în general importanţă calculul lor în cazul tăierii.

Lucrul mecanic de deformaţie este

$$\frac{\tau^2}{2G}$$

de oarece tăierea se produce mai mult în o secţie, şi nu este nevoe să calculăm lucrul de deformaţie înmagazinat în corp.

29. **Relaţia între E şi G.** După cum există o relaţie între rezistenţele tangenţiale şi cele normale trebue să existe o relaţie şi între E şi G. Să reluăm cubul nostru supus la tensiune de către σ. Diagonalele care erau perpendiculare se înclină din cauza deformaţiei, variaţia unghiului drept e γ, produsă de rezistenţele τ care apar în planele diagonale (fig. 49).

Vom avea după figură

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

desvoltând şi negljâind produsul $\gamma\varepsilon$ care este de ordinul al doilea

$$\gamma = \varepsilon \frac{m+1}{m}$$

ţinând cont de legea lui Hooke,

$$\frac{\tau}{G} = \frac{\sigma}{E} \frac{m+1}{m}$$

şi cum avem

$$\tau = \frac{\sigma}{2}$$

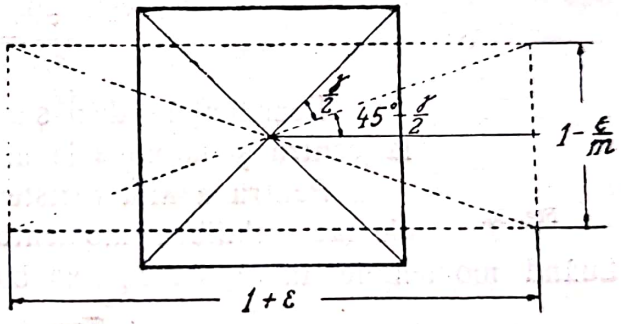


Fig. 49

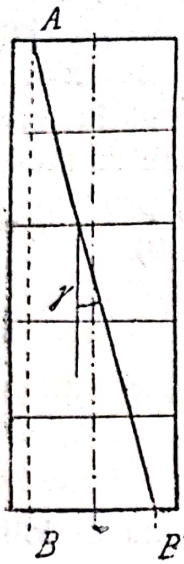
rezultă relaţia între E şi G, cu care putem calcula pe acesta din urmă.

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E = \frac{10}{2(10+3)} E = \frac{5}{13} E$$

§ 5. Răsucirea.

30. **Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă.** Dacă pe o bară cilindrică supusă la răsucire, trasăm nişte cercuri în plane paralele între ele şi normale pe axa barei, precum şi o generatoare, observăm că după răsucire cercurile trasate rămân tot paralele, distanţa între ele nu a variat iar generatoarea a devenit o elice.

Suntem deci înclinaţi să credem că fie-care cerc rămâne în acelaşi plan, şi se roteşte faţă de cel vecin de un unghiu



oare-care. Facem deci ipoteza că secţiile plane înainte rămân plane şi după deformaţie.

Rotirea secţiei nu se poate face fără ca să ia naştere rezistenţe, care sunt conţinute în planul ei şi sunt deci rezistenţe tangenţiale. Aceste rezistenţe vor fi proporţionale cu deplasările. In centrul cercului unde nu este deplasare nu vom avea rezistenţă. Cum deplasările produse prin rotirea cercului sunt arce de cerc, proporţionale cu razele, şi rezistenţa va fi proporţională cu distanţa la centru, fiind maximă la margine. Dacă τ_1 este această valoare maximă la distanţa a (raza cercului) la o distanţă oarecare r vom avea τ dat de

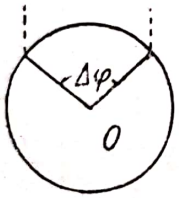


Fig. 50.

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{r}{a}$$

Rezistenţele deci sunt distribuite liniar, nule la centru şi maxime la margine.

Pentru a afla rezistenţele trebue să scrim că ele fac echilibru momentului de răsucire exterior. Luând momentele în raport cu axa barei, avem

$$M_t = \int r\,\tau\,d\Omega$$

pe care o putem scrie

$$M_t = \int r \frac{\tau_1 r}{a}\,d\Omega = \frac{\tau_1}{a}\int r^2\,d\Omega$$

Integrala $\int r^2\,d\Omega$ se numeşte momentul de inerţie polar şi se notează I_p. Vom avea atunci

$$\tau_1 = \frac{M_t\,a}{I_p}$$

Suntem conduşi să aflăm momentul de inerţie polar al secţiei. Fie O centrul şi un element de suprafaţă $d\Omega$ situat la distanţa r de centru, avem

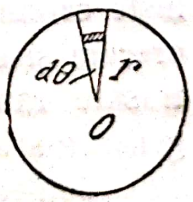


Fig. 51.

$$d\Omega = r\,dr\,d\theta$$

$$I_p = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi a^4}{2}$$

și înlocuind această valoare în formula de mai sus vom găsi

$$\tau_1 = \frac{2\,M_t}{\pi a^3}$$

de obicei cunoaștem diametrul piesei $d = 2\,a$ așa că formula devine

$$\tau_{max} = \frac{16\,M_t}{\pi\,d^3}$$

și putem scrie simplu τ știind că este vorba de rezistența maximă.

In o secție înclinată rezistențele sunt greu de calculat și nu prezintă importanță.

31. **Calculul deformației.** Deformația ce se produce este rotirea secției cu un unghiu pe care îl notăm $\Delta\varphi = BOB'$. Pe de altă parte generatoarea $AB = l$ ne dă o elice AB', și aceasta face un unghiu cu secțiile normale, care înainte era de 90°. Această variație de unghiu nu este însă de cât o lunecare pe care noi am notat'o cu γ așa că avem

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{BB'}{BA}$$

$$\gamma = \frac{a\Delta\varphi}{l}$$

Această deformație $\Delta\varphi$, se repartizează uniform pe toată lungimea l, iar γ este același pentru toate secțiile ce le-am face în bară.

După legea lui Hooke putem scrie

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{a\Delta\varphi}{l}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{a}\frac{l}{G} = \frac{M_t\,l}{GI_p} = \frac{2\,M_t\,l}{\pi\,a^4\,G}$$

De obicei se vorbește de unghiul de răsucire pe m. l, și fiindcă este uniform repartizat acesta este

$$\frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{\tau}{a\,G} = \frac{M_t}{G\,I_p}$$

exprimat în radiani /ml; sau în grade /ml, avem

$$\frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{180}{\pi}\frac{M_t}{G\,I_p}$$

32. Lucrul mecanic de deformaţie. Il aflăm cu ajutorul lucrului specific de deformaţie scriind

$$dL = \frac{\tau^2}{2G} dV$$

în cazul acesta τ variază de la 0 la τ, ca element de volum luăm $d\Omega\ dx = dV$ şi avem

$$L = \int \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_o^l \int_o^a \frac{\tau^2}{a^2} \frac{r^2}{2G} d\Omega\, dx = \frac{\tau^2 l}{2Ga^2} I_p$$

de unde ţinând seama de formula rezistenţei avem

$$L = \frac{M_t^2 l}{2GI_p}$$

Observăm că şi aci avem

$$L = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} = \frac{1}{2} M_t \frac{M_t l}{GI_p} = \frac{1}{2} M_t\ \Delta\varphi$$

regăsim deci după cum ştim lucrul mecanic exterior. Putem deci să scrim lucrul mecanic în funcţie de forţele exterioare, în funcţie de rezistenţe sau de deformaţii

$$L = \frac{1}{2} M_t \Delta\varphi = \frac{\tau_a^2 l}{2Ga^2} I_p = \frac{GI_p \Delta\varphi^2}{2l}$$

33. Calculul arborilor. Un arbore este în general cu secţie circulară şi transmite prin o roată cu curea, sau o roată dinţată un moment, deci lucrează la răsucire. Dacă P este forţa care lucrează la periferia roţii de rază R, transmiţând N cai cu n învârtituri pe minut avem

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{P}{75} \frac{2\pi R n}{60}$$

$$M_t = PR = \frac{75 \cdot 60 \cdot 100}{2\pi} \frac{N}{n} = 71620 \frac{N}{n}$$

am înmulţit cu 100 pentru a exprima pe M_t în kgcm, aşa cum ne este necesar în formulă.

Să presupunem că avem un arbore ce transmite $N = 35$ *HP* cu $n = 200$ învârtituri pe minut.

$$M_t = 71620 \frac{N}{n} = 71620 \frac{35}{200} = 125000 \text{ kgcm}$$

Scanned with OKEN Scanner

luând ca rezistenţă admisibilă $\tau_a = 400$ avem

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\,M_t}{\pi\,\tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 12500}{3{,}14 \times 400}} = 5{,}4 \text{ cm.}$$

La calculul arborilor se mai pune şi condiţia ca arborele să fie rigid, deformaţia la torsiune să nu întreacă $\left(\frac{1}{4}\right)^0$ pe ml. Exprimând acest unghiu în radiani avem

$$\frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{0{,}0043}{100} = \frac{32\,M_t}{\pi G d^4}$$

luăm pentru $G = 800.000$ şi găsim

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \times 12500 \times 100}{3{,}14 \times 800000 \times 0{,}00436}} = 7{,}7 \text{ cm.}$$

34. **Calculul rezoartelor.** Aceste rezoarte în formă de elice, sunt compuse din o sârmă înfăşurată pe un cilindru de rază R şi când sunt solicitate la întindere de o forţă P după axa cilindrului, lucrează la răsucire. Momentul de răsucire este acelaş pentru toate secţiile

$$M_t = PR$$

rezistenţa în interior este

$$\tau_{max} = \frac{16\,M_t}{\pi d^3}$$

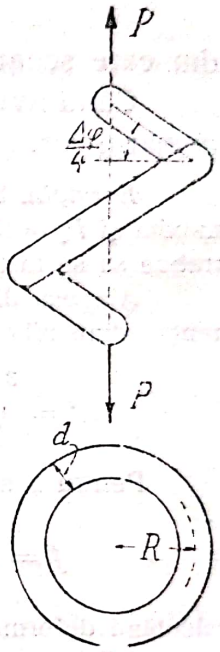


Fig. 52

şi deci forţa ce o poate suporta este

$$P = \frac{\pi\,d^3\,\tau_a}{16\,R}$$

Rezistenţa admisibilă în cazul rezoartelor se ia $\tau_a = 6000$ pentru sarcina statică şi $\tau_a = 4000$ pentru sarcina dinamică. In cazul sarcinilor foarte variabile ca la ventile se ia $\tau_a = 3000$.

Deformaţia corespunzătoare produsă de răsucire

$$\Delta\varphi = \frac{32\,M_t}{\pi\,d^4\,G}\,l = \frac{32\,PR}{\pi\,d^4\,G}\,2\pi R = \frac{64\,PR^2}{d^4\,G}$$

După figură $\Delta\varphi$ se împarte în sus şi jos în părţi egale, aşa că săgeata produsă este

$$f = 4R\,\text{tg}\,\frac{\Delta\varphi}{4} = R\,\Delta\varphi = \frac{64\,PR^3}{d^4\,G}$$

Putem obţine acelaşi lucru şi aplicând teorema lucrului mecanic. Avem

$$L = \frac{Pf}{2} = \frac{1}{2} M_t \Delta\varphi = \frac{1}{2} PR\Delta\varphi$$

$$\frac{Pf}{2} = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} = \frac{P^2 R^2 2\pi R}{2G \frac{\pi d^4}{32}}$$

din care scoatem aceeaşi valoare pentru f.

Când avem un rezort cu mai multe spire se înmulţeşte cu numărul lor.

Exemplu. Să calculăm un rezort, care suportă o forţă $P_1 = 220$ kg. maxim şi $P_2 = 150$ kg. minim. Diferenţa este deci 70 kg, la care rezortul trebue să se turtească cu 40 mm (rezort regulator).

Alegem diametrul interior al rezortului 2 $R = 100$ mm, şi ca rezistenţă admisibilă $\tau_a = 3600$ şi găsim

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_a}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 220 \times 5}{3{,}14 \times 3600}} = 1{,}16 \sim 12 \text{ mm}$$

Pentru o spiră, deformaţia este

$$f = R\Delta\varphi = \frac{64 PR^3}{d^4 G} = \frac{64 \times 70 \times 5^3}{1{,}2^4 \times 850\,000} = 0{,}318 \text{ cm}$$

calculând deformaţia pentru diferenţa de forţă la care trebue să lucreze rezortul. Pentru a avea cursa de 40, avem nevoe de

$$n = \frac{40}{3{,}18} = 1{,}25 \text{ spire.}$$

§ 6. Incovoierea.

35. **Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor dedusă din experienţă.** Dacă pe o bară de secţie oare-care trasăm nişte secţii în plane paralele şi normale pe axa bucăţii observăm că după deformaţie secţiile se înclină şi axa bucăţii se curbează. Pentru aceasta fibrele de la partea de jos trebue să se lungească, avem deci o întindere, cele de la partea de sus să se scurteze, avem deci o

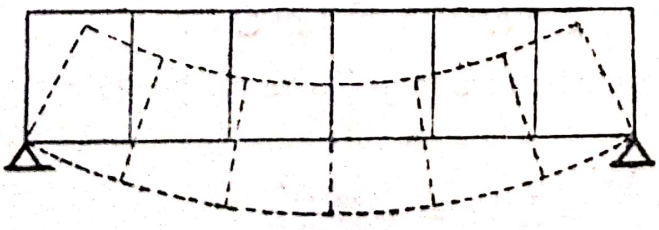


Fig. 53

compresiune. Incovoierea barei este deci rezultatul a două rezistenţe simple, tensiune şi compresiune.

Inclinarea secţiilor se face din cauza unui moment care lucrează în jurul unei axe perpendiculară pe planul figurii. Acesta se numeşte *moment încovoietor* M_i.

Dacă considerăm porţiunea cuprinsă între două secţii vecine, şi admitem ipoteza secţiilor plane, atunci secţia *II* se va roti faţă de secţia *I*, venind în poziţia *II'*, sub acţiunea unui moment încovoietor. Fibra de jos se comprimă, cea de sus se întinde

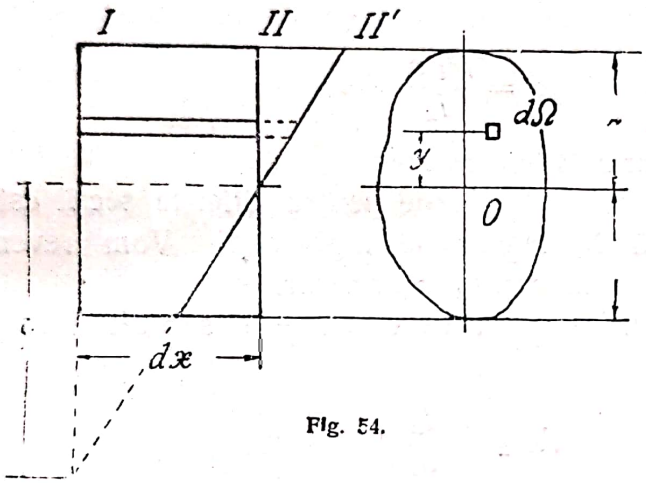


Fig. 54.

trebue deci să existe undeva o fibră care nici nu se lungeşte nici nu se scurtează, aceasta se numeşte fibra neutră iar în secţie îi corespunde o dreaptă *axa neutră*. Rotirea secţiei *II*, se face în jurul acestei axe, şi aceasta este şi axa momentului încovoietor M_i.

Dacă secţia se roteşte rămânând tot plană, ca în figură, atunci deplasările sunt proporţionale cu distanţa notată cu y, adică distanţa la axa neutră pe care o alegem ca axă $0x$. Deplasările însă sunt proporţionale cu lungirea sau scurtarea fibrei, care se obţine împărţind deplasarea cu lungimea dx, şi după legea lui Hooke aceste deformaţii sunt proporţionale cu rezistenţele. Putem deci scrie pentru o fibră la distanţa y de axă, din asemănarea triunghiurilor din figură

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{y}{a_1}$$

în care σ este rezistenţa în fibra la distanţa y, σ_1 rezistenţa în fibra la distanţa a_1 Rezistenţele sunt deci repartizate liniar, nule în axa neutră şi maxime în fibrele cele mai depărtate.

Pentru a afla valoarea rezistenţelor, trebue să scrim că ele fac echilibru momentului încovoietor, care a produs rotaţia.

$$M_i = \int \sigma\, y\, d\Omega$$

pe care o putem scrie

$$M_i = \int y \frac{\sigma_1 y}{a_1} d\Omega = \frac{\sigma_1}{a_1} \int y^2 d\Omega$$

integrala $\int y^2 d\Omega$ se numeşte *momentul de inerţie* al secţiei faţă cu axa x-lor şi se notează cu I_x. Vom avea atunci

$$\sigma_1 = \frac{M_i y}{I_x}$$

care este rezistenţa maximă, iar rezistenţa în punctul la distanţa y este

$$\sigma = \frac{M_i a_1}{I_x}$$

care se numeşte şi formula lui *Navier*.

Valoarea momentelor de inerţie pentru diferite secţii este determinată şi trecută în manualele inginereşti. Vom reveni asupra acestei chestiuni la capitolul următor.

Rezistenţa maximă se mai scrie de obicei şi sub altă formă. Se notează

$$W_{1x} = \frac{I_x}{a_1}$$

numindu-se *W modul de rezistenţă*. Atunci putem să scrim

$$\sigma_{1max} = \frac{M_i}{\frac{I_x}{a_1}} = \frac{M_i}{W_{1x}}$$

şi tot aşa

$$\sigma_{2max} = \frac{M_i}{\frac{I_x}{a_2}} = \frac{M_i}{W_{2x}}$$

avem deci două valori maxime şi alegem dintre ele pe cea mai mare, adică la distanţa cea mai mare.

Cantităţile I_x, W_{1x}, W_{2x} se referă toate la axa 0x, axa neutră a secţiei.

Trebue deci să determinăm poziţia axei neutre în secţie. Pentru asta scrim că suma rezistenţelor ce lucrează pe secţie este nulă, neavând de cât moment încovoietor. Atunci.

$$\int \sigma d\Omega = \int \frac{\sigma_1 y}{a_1} d\Omega = \frac{\sigma_1}{a_1} \int y d\Omega = 0$$

cum σ_1 şi a_1 au valori bine hotărâte rămâne ca integrala să fie nulă. Deci condiţia că axa neutră trece prin centrul de greutate al secţiei.

Fenomenul încovoierii nu este aşa de simplu. De aceea formulele acestea se aplică pentru cazul când nu avem de cât momentul încovoietor, şi când neglijăm alte efecte. Vom relua mai departe studiul (Cap. VII.) examinând în detaliu toate cazurile.

36. Calculul deformaţiei. Deformaţia ce se produce este rotirea secţiei cu un unghiu $\Delta\varphi$. Putem să aflăm acest unghiu scriind

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\varepsilon dx}{y}$$

de unde, înlocuind deformaţia prin rezistenţă, dată de formula lui Navier şi ţinând seama că unghiul e foarte mic avem

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma dx}{Ey} = \frac{M_i}{EI} dx$$

Fie-care secţie se roteşte faţă de cea vecină, iar rotirea depinde de valoarea momentului încovoietor.

Rotirea secţiilor face ca ele să se întâlnească în un punct. Cum secţiile sunt normale, acest punct este centrul de curbură al curbei după care s'a încovoiat axa. După figură putem scrie

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{y}{\rho} = \varepsilon$$

de aci, prin o serie de transformări deducem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_i}{EI} = \frac{\Delta\varphi}{dx}$$

cantitate ce ne dă tocmai curbura în un punct oare-care.

Putem din aceasta să aflăm şi ecuaţia axei deformate, în care s'a transformat axa barei după încovoiere. Se ştie

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

în care din cauza deformaţiilor mici tangenta e foarte aproape de orizontală, deci $y' = 0$

$$y'' = \frac{1}{\rho} \text{ sau } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_i}{EI}$$

care se numeşte ecuaţia diferenţială a axei deformate şi din care prin integrare putem obţine ecuaţia curbei raportată la două axe de coordonate.

37. **Lucrul mecanic de deformaţie.** Il aflăm cu ajutorul lucrului specific de deformaţie, scriind

$$dL = \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

şi în cazul acesta σ variază dealungul secţiei aşa că luăm $dV = d\Omega\ dx$, înlocuim pe σ prin valoarea lui şi avem

$$L = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_o^l \int \frac{M_i^2 y^2}{2EI^2}\ d\Omega\ dx = \int_o^l \frac{M_i^2}{2\ EI} dx$$

în care M variază dealungul barei după o lege ce o vom stabili ulterior.

Se poate adeveri şi aci că pentru două secţii vecine, apropiate cu dx, între care lucrează momentul M_i avem

$$dL = \frac{M_i^2}{2EI} dx = \frac{1}{2} M_i\ \Delta\varphi$$

§ 7. Temperatura.

38. **Ipoteza de repartiţie a rezistenţelor.** Temperatura prin dilataţia pe care o produce, dă naştere la rezistenţe în interior, atunci când corpul nu se poate dilata liber. Aceste rezistenţe sunt proporţionale cu deformaţiile produse. Din acest punct de vedere temperatura lucrează ca o forţă exterioară asupra fiecărei părticele din material, ca greutatea de ex.

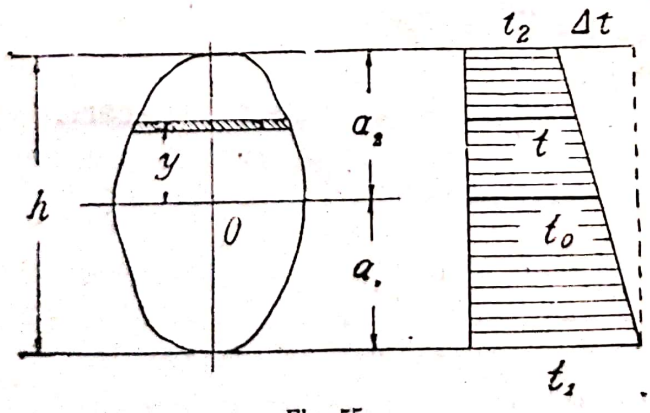


Fig. 55.

Se admite pentru variaţia temperaturii în interiorul corpului o lege liniară ca şi

până acum. Dacă t_1 și t_2 sunt temperaturile pe cele două fețe, se notează cu

$$\Delta t = t_1 - t_2$$

și cu t_0 temperatura în axa ce trece prin centrul de greutate al secției care este

$$t_0 = t_1 \frac{a_2}{h} + t_2 \frac{a_1}{h}$$

așa că atunci temperatura în o fibră oare-care situată la distanța y va fi

$$t = t_0 + \Delta t \frac{y}{h}$$

Deformația ce o suferă fibra sub acțiunea temperaturii este dată de coeficientul de dilatație al materialului. Avem deci

$$\varepsilon = \alpha t = \alpha t_0 + \alpha \Delta t \frac{y}{h}$$

de unde putem trece la rezistențe

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \alpha t_0 + E \alpha \Delta t \frac{y}{h}$$

Vedem că rezistența se compune din două părți. Una constantă pe care o putem deci asemăna cu o tensiune sau compresiune și alta variabilă cu distanța la axă, pe care deci o putem asemăna cu încovoierea.

Putem deci să traducem efectul temperaturii prin niște forțe care ar produce aceleași deformații. Acestea ar fi

$$N = \sigma \Omega = E \alpha t_0$$

$$M = \frac{\sigma I}{y} = \frac{E \alpha \Delta t I}{h}$$

Exemplu. O grindă *I* 15, de secție $\Omega = 20{,}4$ cm² și lungime $l = 2$ m este înțepenită între două ziduri. Dacă temperatura se ridică cu 20° să se afle rezistența în interior și forța cu care grinda împinge în ziduri

$$\sigma = E \alpha t = 2\,100\,000 \times 0{,}000011 \times 20 = 462 \text{ kg/cm}^2$$

$$N = E \alpha t \Omega = 2\,100\,000 \times 0{,}000011 \times 20 \times 20{,}4 = 9428 \text{ kg.}$$

39. **Calculul deformațiilor.** Deformațiile produse sunt lungiri produse de forțe și rotații produse de moment. Lungirile vor avea de efect lungirea axei și sunt

$$\varepsilon = \alpha t$$

iar rotirile vor avea ca efect curbarea bucăţii adică vom avea un unghiu

$$\Delta\varphi = \frac{M}{EI}\,dx = \frac{\alpha\,\Delta t}{h}\,dx$$

precum şi o curbură dată de

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta\varphi}{dx} = \frac{\alpha\,\Delta t}{h}$$

Exemplu. O placă de fier de 12 mm grosime supusă pe o faţă la temperatura apei care fierbe $t_2 = 100^0$, şi pe cealaltă la temperatura focului $t_1 = 900^0$. Placa se va curba după

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha\,\Delta t}{h} = \frac{0{,}000011 \times 800}{1{,}2}$$

şi în loc de dreaptă va prezenta o rază de curbură

$$\rho = \frac{1{,}2}{800 \times 0{,}000011} \simeq 136\text{ cm}$$

Pentru că diferenţa de temperatură este aceeaşi dealungul plăcii, Δt nu variază, deci şi raza de curbură este aceeaşi. Axa deformată va fi deci un cerc, pe când înainte placa era dreaptă.

40. **Lucrul mecanic de deformaţie.** Temperatura nu produce rezistenţe şi lucru mecanic decât în contra unor forţe care se opun la dilataţie. Dacă deci avem N şi M care lucrează asupra unui element din bară, producând nişte rezistenţe σ, peste care se suprapune acţiunea temperaturii vom avea pentru lucrul mecanic

$$L = \int \sigma\,\varepsilon\,dV = \int \sigma\left(\alpha t_0 + \alpha\,\Delta t\,\frac{y}{h}\right) dV$$

înlocuind pe σ prin valoarea lui şi separând efectul forţei normale şi al momentului încovoetor avem

$$L = \int_0^l \alpha\,t_0\,N\,dx + \int_0^l \alpha\,\Delta t\,\frac{M}{h}\,dx$$

unde am integrat odată în raport cu $d\Omega$.

41. **Calculul conductelor electrice.** Conductele electrice compuse din un fir metalic suspendat între cei doi izolatori lucrează la tensiune. In timpul verii şi iernii, supuse la diferenţe de temperatură, se vor naşte rezistenţe suplimentare.

Poziţia de echilibru pe care o ia un fir suspendat între două

puncte este curba numită lănţişor. Cum mânuirea acestei curbe pentru calcul este mai greoae vom face câteva ipoteze simplificătoare.

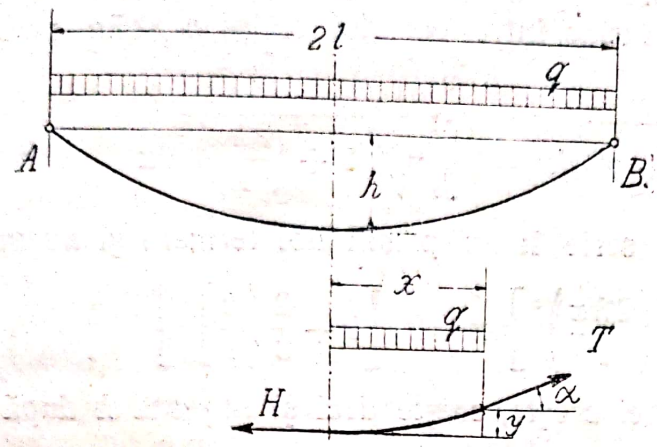


Fig. 56

Fie $2l$ deschiderea între cele două puncte, q greutatea pe metru liniar de proecţie orizontală, h săgeata la mijloc. Considerăm o porţiune din fir pentru care scrim ecuaţiile de echilibru

$$T\cos\alpha = H \quad , \quad T\sin\alpha = qx$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H}$$

din care prin integrare deducem

$$y = \frac{1}{2}\frac{qx^2}{H}$$

ecuaţie care ne arată o parabolă, şi putem asemăna deci curba pe care o ia firul în mod aproximativ cu o parabolă.

Dacă în ecuaţia aceasta facem $x = l$, $y = h$ deducem

$$h = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{H}$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{h}$$

din care putem afla sau tensiunea în fir când ni se dă săgeata, sau săgeata pe care o obţinem cu o tensiune anumită.

Cunoscând tensiunea putem afla rezistenţa scriind

$$\sigma = \frac{H}{\Omega} = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{h\Omega}$$

Montând firul în timpul verii, cu o săgeată anumită, avem o rezistenţă. In timpul iernii temperatura scăzând, firul se strânge, săgeata h scade, rezistenţa creşte, şi dacă nu s'a ţinut socoteala de acest lucru la montare, se poate ca firul să se rupă.

Scanned with OKEN Scanner

Vom calcula deci scurtarea firului şi noua săgeată h_1, pentru a afla rezistenţa.

Lungimea firului întins între cei doi stâlpi o aflăm prin integrare

$$s = 2\int_0^l \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{2hx}{l^2}\right)^2}\,dx$$

desvoltăm radicalul în serie luăm primii doi termeni şi avem

$$s = \int_0^l \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2hx}{l^2}\right)^2\right]dx = 2l\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2\right]$$

când lungimea s a curbei creşte, creşte deci şi săgeata h după această relaţie.

Considerăm că la o temperatură t_0, avem valorile h_0, H_0, σ_0, şi la o temperatură t avem h, H, σ. Lungimea firului care era s_0 va deveni s, sporită cu lungirile provocate de temperatură şi rezistenţă, adică

$$s = s_0\left(1+\frac{\sigma-\sigma_0}{E}\right)[1+\alpha(t-t_0)]$$

neglijând termenii produs căci avem factori foarte mici scrim

$$s = s_0[1+\frac{\sigma-\sigma_0}{E}+\alpha(t-t_0)]$$

sau ţinând cont de relaţia ce ne dă pe s, scrim

$$2l[1+\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2] = 2l[1+\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2][1+\frac{\sigma-\sigma_0}{E}+\alpha(t-t_0)]$$

la care neglijând încă odată termenii produs

$$1+\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2 = 1+\frac{2}{3}\left(\frac{h_0}{l}\right)^2+\frac{\sigma-\sigma_0}{E}+\alpha(t-t_0)$$

Această relaţie ne serveşte să calculăm pe h. Cum însă h este legat cu σ, vom înlocui

$$h_0 = \frac{ql^2}{2H_0} = \frac{\gamma\Omega l^2}{2\sigma_0\Omega} = \frac{\gamma l^2}{2\sigma_0}$$

şi tot aşa

$$\sigma = \frac{\gamma l^2}{2h}$$

aşa că înlocuind avem

$$\frac{2}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{\gamma^2 l^2}{4\sigma_0^2} + \frac{1}{E}\left(\frac{\gamma l^2}{2h} - \sigma_0\right) + \alpha(t - t_0)$$

care ne dă o ecuaţie de *gr III* în h

$$h^3 - \frac{3}{2}l^2\left[\frac{1}{6}\frac{\gamma^2 l^2}{\sigma_0^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{\sigma_0}{E}\right]h = \frac{3}{4}\frac{\gamma l^4}{E}$$

Exemplu. Un fir telefonic de bronz de 4 mm este întins vara la + 20°, pe stâlpi distanţaţi la 75 m. Ce tensiune trebue să-i dăm la montaj aşa fel ca iarna la — 20° să nu fie ameninţat.

Firul are $\Omega = 0{,}12$ cm², $q = 0{,}113$ kg/ml. Admiţând rezistenţa cea mai mare în fir la $\sigma_0 = 1500$, vom avea

$$H_0 = \sigma_0 \Omega = 1500 \times 0{,}12 = 180 \text{ kg}$$

$$h_0 = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{H_0} = \frac{1}{2}\frac{0{,}113 \times \overline{37{,}5}^2}{180} = 0{,}44 \text{ m}$$

pentru temperatura + 20° firul se va lungi, şi va lua o nouă săgeată h, pe care o determinăm cu ecuaţia

$$h^3 - \frac{3}{2}l^2\left[\frac{1}{6}\frac{\gamma^2 l^2}{\sigma_0^2} + \alpha(t - t_0) - \frac{\sigma_0}{E}\right]h = \frac{3}{4}\frac{\gamma l^4}{E}$$

transformând datele în kg şi centimetri pentru a avea formula omogenă, scrim

$$h^3 - \frac{3}{2}\overline{3750}^2\left[\frac{1}{6}\frac{\overline{\frac{9}{1000}}^2 \times 3750^2}{1500^2} + 0{,}000017 \times 40 - \frac{1500}{1300000}\right]h = \frac{3}{4}\frac{\overline{\frac{9}{1000}}\,3750^4}{1300000}$$

care făcând calculele ne dă

$$h^3 - 13692\,h - 1017692 = 0$$

a cărei soluţie o aflăm prin încercări cuprinsă între 144 şi 145, deci găsim

$$h = 144 \text{ cm}$$

la această săgeată va corespunde

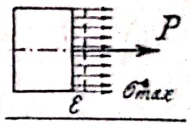
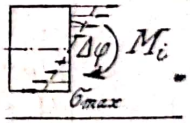
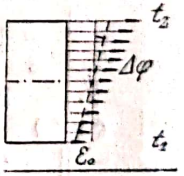
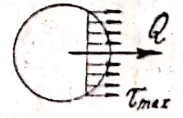
$$H = \frac{1}{2}\frac{ql^2}{h} = \frac{1}{2}\frac{0{,}113 \times \overline{37{,}5}^2}{1{,}44} = 55 \text{ kg}$$

ceea ce ne dă o rezistenţă

$$\sigma = \frac{55}{0{,}12} = 458 \text{ kg/cm}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabloul formulelor întrebuințate pentru rezistențele simple.

Nr. crt	Încărcarea		Rezistența	Rez. maximă	Dimensionare	Deformația	Observațiuni	
1	*Intindere*	rezistențe normale σ	$\sigma = \frac{P}{\Omega}$	$\sigma_{max} = \frac{P}{\Omega}$	$\Omega_{neces} = \frac{P}{\sigma_a}$	$\Delta l = \frac{Pl}{\Omega E}$		
2	*Compresiune*		$\sigma = \frac{P}{\Omega}$	$\sigma_{max} = \frac{P}{\Omega}$	$\Omega_{neces} = \frac{P}{\sigma_a}$	$\Delta l = \frac{Pl}{\Omega E}$	Numai pentru bare scurte, altfel există pericol de flambaj	
3	*Incovoiere*		$\sigma = \frac{M_i y}{I_x}$	$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_x}$	$W_x = \frac{M_i}{\sigma_a}$	$\frac{\Delta\varphi}{dx} = \frac{M_i}{EI}$	Secția raportată la axele principale	
4	*Temperatură*		$\sigma = E\alpha t_0$ $\sigma = -E\alpha\Delta t \frac{y}{h}$	$\sigma_{max} = E\alpha t_0$ $\sigma_m = E\alpha\Delta t \frac{a_2}{h}$	— —	$\Delta l = \alpha t_0 l$ $\frac{\Delta\varphi}{dx} = \frac{\alpha\Delta t}{h}$	$\Delta t = t_2 - t_1$ $t_0 \neq t_1 \frac{a_2}{h} + t_2 \frac{a_1}{h}$ temp. dif. pe amb. fețe	
5	*Tăiere*	rez. tangențiale τ	$\tau = \frac{T}{\Omega}$	$\tau_{max} = \frac{T}{\Omega}$	$\Omega_{neces} = \frac{T}{\tau_a}$	—	Numai p. secțiuni mici (nituri, șuruburi) sau forțe uniform distribuite	
6	*Torsiune*		$\tau = \frac{M_t r}{I_p}$	$\tau_{max} = \frac{16\,M}{\pi d^3}$	$d = \sqrt[3]{\frac{16\,M_t}{\pi\,\tau_a}}$	$\frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{32\,M_t}{\pi G d^4}$	Numai în centru secția circulară	

Cap. IV. Rezistența îmbinărilor.

42. **Despre îmbinări.** Imbinarea este un mod de construcție pentru a lega îrtre ele două piese diferite. Pentru aceasta trebue să prelucrăm suprafețele ce vin în contact, și să avem niște piese cu care facem legătura: buloane, nituri, sudură. Majoritatea îmbinărilor sunt supuse la întidere, compresiune, tăiere, încovoiere, și calculul și dimensionarea îmbinărilor este un câmp folositor de aplicație pentru cunoștințele căpătate până acum.

Nu ne vom interesa decât de proprietățile de rezistență ale îmbinărilor și de calculul forțelor ce ele pot să transmită. Se fac și îmbinări de legătură care servesc numai la legarea pieselor între ele, fără a transmite o forță însemnată. Acestea se fac cu nituri la rece, lipitură tare sau moale, încleierea pieselor de lemn, și nu ne interesează.

Imbinările se zic *demontabile*, când se pot desface în părțile ce le compun. Ele se pot desface pentru a le vizita, pentru întreținere, sau pentru a le schimba părțile uzate. Se fac cu ajutorul buloanelor, penelor, șuruburilor.

Imbinările se zic *nedemontabile*, când nu se pot desface decât distrugând îmbinarea sau părți din ea. Ele sunt necesare când este vorba de etanșeitate, ca la cazane sau rezervoare, sau când se cere ca piesele să nu fie mobile ca la construcțiile metalice. Imbinările nedemontabile se fac prin nituire sau prin sudură.

Mersul general pentru calculul unei îmbinări este de a examina modul cum se poate rupe, și a găsi secția unde se va produce eventual ruperea. Ea se numește *secția periculoasă*.

Scanned with OKEN Scanner

Câte odată trebuesc evitate şi deformaţiile mari, ele aducând jocul pieselor şi distrugerea îmbinării.

O îmbinare se rupe evident unde este mai slabă, deci rezistenţa unei îmbinări este rezistenţa celei mai slabe părţi a ei. De aci motivul economic şi raţional de a da, pe cât pos bil, tuturor pieselor aceiaşi rezistenţă, pentru ca toate părţile îmbinării să prezinte acelaş grad de siguranţă la rupere.

Tot pentru motive de economie o îmbinare trebue să fie simplă, cu piese puţine. Dar condiţiile de rezistenţă cer adesea ori contrariul, secţii mari, distribuţia eforturilor, deci piese secundare sau lungimi mari.

Intre aceste condiţii contrarii practica a găsit anume forme ce trebuesc respectate. Multe din ele au fost normalizate şi nu se construesc decât după aceste norme. Dar cunoaşterea condiţiilor de rezistenţă ne lămureşte multe date constructive şi constitue o aplicaţie interesantă a cunoştinţelor obţinute.

43. **Bulonul, dimensionarea lui.** Bulonul este o bară cilindrică ghiventată la un capăt iar pe acest ghevint se poate înşuruba o piuliţă sau mutelcă. In capătul celălalt se formează la forjă un cap. (fig. 57). Intre mutelcă şi cap se produce strângerea pieselor, care reacţionând, supun corpul bulonului la întindere.

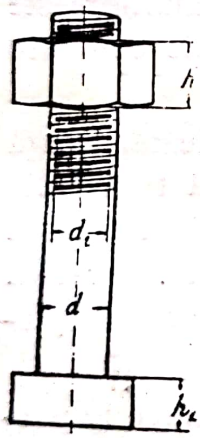


Fig. 57

Bulonul se calculează deci la întindere şi secţia periculoasă este aceia obţinută după tăierea ghevintului, în fundul tăieturii.

$$P = \frac{\pi d_i^2}{4} \sigma_a$$

Rezistenţele admisibile prescrise sunt $\sigma_a = 600$ kg/cm² pentru ghevintul tăiat la strung, $\sigma_a = 480$ kg/cm² pentru ghevintul tăiat la filieră.

Dacă ne referim la diametrul bulonului d, atunci pentru ghevint Whitworth putem lua

$$\left(\frac{d_i}{d}\right)^2 \cong 0{,}63$$

deci

$$P = \frac{\pi}{4} 0{,}63 \; d^2 \sigma_a \cong 0{,}5 \; d^2 \sigma_a$$

ceiace ne dă pentru cele două cazuri

$$P = 300\ d^2 \quad , \quad P = 240\ d^2$$

Dar şi capul şi mutelca bulonului trebuesc să reziste şi sub acţiunea strângerii bulonului ele sunt supuse la tăiere după o suprafaţă cilindrică. Deci.

$$\pi\, d\, h\, \tau_a = \frac{\pi\, d_i^{\,2}}{4}\sigma_a$$

$$h = \frac{1}{4}\left(\frac{d_i}{d}\right)^2 d\ \frac{\sigma_a}{\tau_a}$$

Tăierea în aceste secţii nu este uniform distribuită, pe de altă parte materialul este slăbit prin prelucrarea ghevintului, transmiterea forţei se face neuniform căci nu toate firele ghevintului vin perfect în contact. De aceia practica a normalizat dimensiile

$h = d$ pentru mutelcă

$h_1 = 0{,}7\ d$ pentru cap.

Buloanele sunt normalizate, după tabele, şi nu se pot găsi în comerţ decât acestea. Dimensiile lor se dau în ţoli englezi, şi anume numai diametrul d, celelalte rezultând din tabele. Tot în ţoli sunt însemnate cheile pentru strâns mutelcile precum şi bacurile dela filieră.

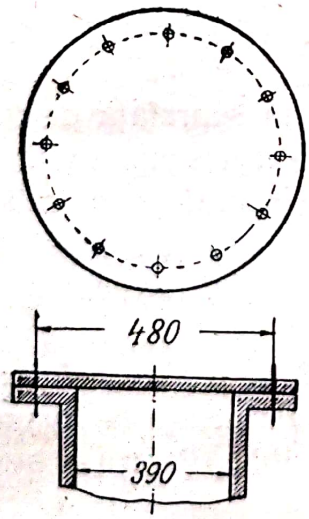


Fig. 58.

Exemplu. Capacul cilindrului unei maşini cu abur este fixat cu buloane aşezate pe un cerc de 480 mm diametru. (fig. 58) Diametrul interior al cilindrului este $D = 390$ mm, presiunea în cilindru este $p = 12$ at. Ce dimensii trebue să aibă buloanele?

Presiunea totală este

$$P = \frac{\pi D^2}{4} p = 1194{,}59 \times 12 = 14{,}3\ \text{t}$$

vom avea deci condiţia

$$n\,\frac{\pi\, d_i^{\,2}}{4}\,\sigma_a = P$$

rămânând să stabilim atât numărul buloanelor cât şi diametrul lor.

Alegem 5/8 " adică $d_i = 12{,}92$ mm, rezistenţa este

$$R = \frac{\pi\, d_i^{\,2}}{4}\sigma_a = 1{,}30 \times 600 = 780\ \text{kg}.$$

și ne trebue

$$n = \frac{14300}{780} = 19 \text{ buloane,}$$

care ar fi prea dese, căci distanța între ele este

$$e = \frac{\pi D'}{n} = \frac{150{,}80}{19} = 8 \text{ cm}$$

Alegem 3/4 " adică $d_i = 15{,}80$ mm, rezistența este

$$R = \frac{\pi d_i^2}{4}\sigma_a = 1{,}96 \times 600 = 1180 \text{ kg}$$

și ne trebue

$$n = \frac{14300}{1180} = 12 \text{ buloane}$$

distanța între ele

$$e = \frac{\pi D'}{n} = \frac{150{,}80}{12} = 12{,}5 \text{ cm.}$$

Condiția care se pune pentru distanța între buloane este $e = 6{,}5\ d$, suficient pentru etanșeitate.

44. **Bulonarea pieselor.** Pentru a lega două table în buloane trebue întâi să le găurim. In această gaură se introduce un bulon, care împiedică cele două table de a se mai mișca sub acțiunea forței. Prin aceasta bulonul este supus la tăiere, în una sau mai multe secții, după numărul de table ce sunt legate.

Se admite că rezistența la tăiere este uniform distribuită pe secția bulonului, așa că pentru n secții de tăiere vom avea

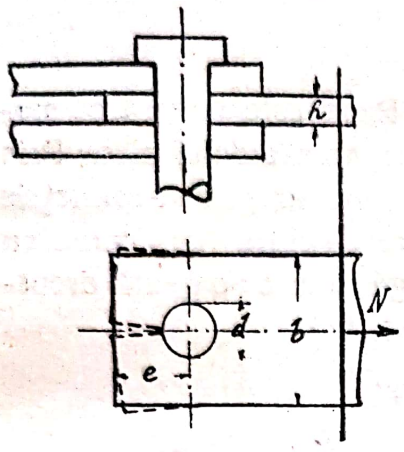
$$P = n\frac{\pi d^2}{4}\tau_a$$

Bulonul primește și transmite forța prin suprafața de contact între el și pereții găurii. Se admite, pentru simplificare să se ia drept suprafață de acțiune, în loc de suprafața laterală a găurii, secția diametrală adică diametrul înmulțit cu grosimea. Dar și presiunea ce poate lucra se ia mai mare, întrucât pe de o parte am micșorat secția, iar pe de altă parte și materialul rezistă în bune condițiuni căci nu poate să se deplaseze lateral. Se admite $\sigma_1 = (1{,}5 - 2)\ \sigma$, în care σ este rezistența la compresiune, pentru care se ia valorile admisibile. Pentru n secții avem deci

$$n\ d\ h\ \sigma_1 = P$$

In aplicații se alege rezistența cea mai mică, fie calculându-se rezistența bulonului la tăiere, fie presiunea pe peretele găurii

Dar şi tabla trebue să prezinte aceiaşi rezistenţă ca şi bulonul. Cum a trebuit să găurim tabla, trebue ca lăţimea ce a rămas să suporte sarcina ce-i revine, deci



Fig, 59

$$(b-d)\ h\,\sigma = N$$

Ca precauţie, pentru că tabla e slăbită prin gaură, pentru că rezistenţele nu mai sunt uniform distribuite, ci prezintă valori mai mari în vecinătatea găurii, se ia

$$(b-d)\ h\,\sigma = 1{,}5\ N = 1{,}5\ \frac{\pi d^2}{4}\,\tau$$

Grosimea tablei h trebue să fie aşa încât presiunea bulonului pe peretele găurii să nu fie întrecută. Avem deci

$$h\,d\sigma_1 = N = \frac{\pi d^2}{4}\,\tau$$

în care

$$\sigma_1 = 2\,\sigma,\ \tau = 0{,}8\ \sigma,\ \text{şi deci}\ d = 3h$$

iar pentru b găsim

$$b = d + 1{,}5\,\frac{\pi}{4}\,\frac{d}{h}\,\frac{\tau}{\sigma} \qquad \text{se ia}\ b = 3\ d$$

Distanţa dela gaura bulonului până la margmea tablei trebue să reziste la tăiere

$$2\ e\,h\,\tau = \frac{\pi d^2}{4}\,\tau$$

se ia în practică $e = 1{,}5\ d$.

45. **Bulonarea barelor rotunde.** Prin forjare se lăţeşte capătul barei rotunde, se formează un ochiu, se dă o gaură pentru bulon, şi se păstrează dimensiile găsite mai sus. (fig. 60).

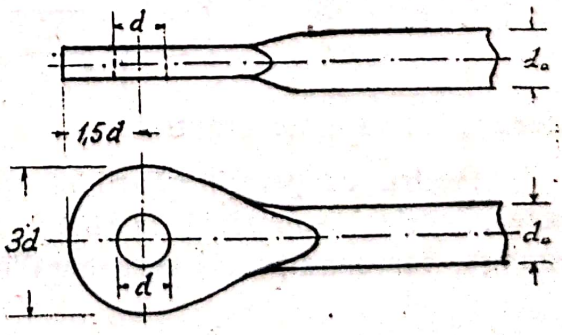


Fig. 60

Pentru două secţii de tăiere vom avea

$$2\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,\tau = \frac{\pi\,d_o{}^2}{4}\,\sigma$$

de unde scoatem

$$d = d_o \sqrt{\frac{\sigma}{2\tau}}$$

46. Pana, îmbinarea cu pană. Pana este o piesă cu muchiile uşor înclinate, care serveşte la legarea a două piese. Prin scoaterea penei îmbinarea se desface uşor, iar prin suprafeţele înclinate ale penei se produce strângerea. Pentru îmbinarea cu pană piesele se trec una prin alta, se găuresc cu o gaură dreptunghiulară, în care se aşează pana (fig. 61).

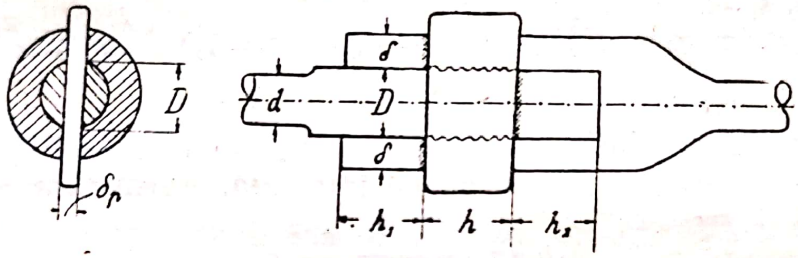


Fig 61

Pentru a suporta sarcina barele au diametrul d, dat de condiţia de rezistenţă. De oarece prin fixarea penei trebue să găurim piesa, urmează că ea trebue forjată la un diametru D aşa fel ca

$$\left(\frac{\pi}{4} D^2 - \delta_p D\right)\sigma = \frac{\pi}{4} d^2\sigma$$

grosimea penei se dă, din practică,

$$\delta_p = \frac{D}{4}$$

şi deci rezultă

$$D = d\sqrt{\frac{\pi}{\pi - 1}} \cong \frac{4}{3} d$$

dimensia fixată de practică.

Pentru ca pereţii găurii să nu se strivească, trebue să avem aceiaşi suprafaţă la bara din dreapta şi la cea din stânga, iar condiţia de rezistenţă ne dă

$$2\,\delta\,\frac{\delta_p}{2}\,\sigma_1 = D\,\delta_p\,\sigma_1 = \frac{\pi d^2}{4}\sigma$$

şi cu dimensionarea dată $D = \frac{4}{3} d$, rezultă

$$\sigma_1 = \frac{\pi d^2}{4 \delta_p D} \sigma \cong 1{,}75 \ \sigma$$

deci presiunea este asigurată.

Înălţimea penei este determinată de condiţia ca să nu se taie după două secţii

$$2 \ h \delta_p \tau = \frac{\pi d^2}{4} \sigma$$

$$h = \frac{\pi d^2}{8 \delta_p} \frac{\sigma}{\tau} \cong \frac{4}{3} d_1$$

Calculul distanţelor h_1 şi h_2 se face la tăiere, adică

$$2 D h_2 \tau = 4 \frac{\delta_1}{2} h_1 \tau = \frac{\pi d^2}{4} \sigma$$

se ia deobiceiu

$$h_1 = h_2 = 0{,}8 \ h$$

Pentru ca legătura între tija şi manşonul forjat să fie făcută şi să nu se producă tăierea, luăm distanţa $0{,}7 \ D$, determinată la buloane.

Când manşonul este greu de forjat, se întrebuinţează un manşon tubular, în care se fixează cele două bare cu două pene.

47. **Nitul, dimensionarea lui.** Nitul este format dintr'o tijă cilindrică, cu un cap în formă de calotă sferică. Celalt cap se forjează la faţa locului prin ciocănire, după ce nitul a fost înroşit în foc şi introdus în gaura făcută în table. Prin răcire nitul se scurtează şi strânge tablele.

Nu putem însă afla forţa la care lucrează nitul, strângerea fiind hotărâtă de temperatură. Dar totuşi nitul trebue dimensionat aşa fel ca să poată suporta această întindere.

Nitul se poate rupe prin tăierea capului, deci

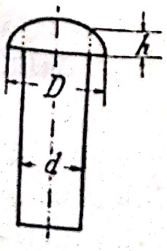


Fig. 62

$$\frac{\pi d^2}{4} \sigma = d \ h \ \tau$$

şi pentru $\tau = 0{,}8 \ \sigma$ rezultă

$$h = \frac{5}{16} d \cong \frac{3}{8} d$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte capul nu trebue să strivească suprafața de contact, deci

$$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\,\sigma_1 = \frac{\pi d_2}{4}\,\sigma$$

adică

$$D = d\sqrt{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma}} \cong 1{,}5\ d$$

Pentru construcții se întrebuințează dimensiile normalizate după tabele, și nu se pot găsi în comerț decât aceste nituri normalizate. Diametrul găurii se face cu 1 mm mai mare ca diametrul nitului.

48. **Imbinări nituite.** Tablele se leagă între ele prin nituri bătute la cald. Pentru aceasta tablele se găuresc, și se fixează între ele provizoriu cu buloane sau cleşti. In gaură se introduce nitul încălzit la culoarea roş-alb. Un lucrător ține capul nitului cu un ciocan, care are în gol forma capului nitului, iar un alt lucrător formează cu ciocanul capul celalt turtind tija nitului care iese afară (fig. 63). Cu o unealtă, nituitoarea, care are în gol forma capului nitului, se bate pe urmă pentru a se da forma definitivă capului. Lucrarea trebue terminată când nitul are încă culoarea roş-vişiniu.

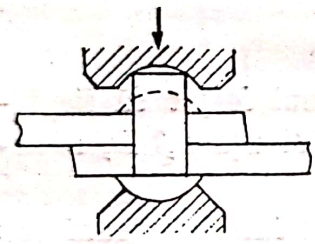


Fig. 63

Prin răcire nitul se strânge şi strânge astfel şi tablele stabilind legătura între ele. Şi diametrul nitului se contractă, aşa în cât nu avem contact între corpul nitului şi peretele găurii. Dar prin răcire nitul strânge piesele foarte tare, ele putând chiar să intre una în alta.

Rezistența îmbinării nituite este produsă deci în primul rând prin strângerea nitului, care asigură contactul între table, mărit încă prin frecare. De aci nevoia de a bate bine niturile pentru ca ele să se strângă. După răcire niturile se încearcă cu ciocanul, şi dacă unele nu sunt bine bătute se taie cu dalta şi se bat altele.

Strângerea niturilor atârnă însă de temperatura la care am terminat nituirea. Aceasta s'ar putea măsura, dar este în orice caz nesigură şi schimbătoare, aşă că nu poate fi un element pe care să putem baza calculele noastre. De aceia ni-

tul nu se dimensionează, ci se alege după consideraţiuni practice. Calculăm însă numărul de nituri necesar pentru a suporta o anumită sarcină.

Pentru nituri se întrebuinţează în general oţel moale, cu rezistenţele prescrise de norme. In anumite cazuri, pentru lucrări de cazangerie, se întrebuinţează table şi nituri de aramă, în construcţia avioanelor table şi nituri de aluminiu.

Pentru table subţiri se întrebuinţează nituri de dimensii mici, care se bat la rece, până la un diametru de 8 mm. Pentru table mai groase niturile se bat numai la cald, cu mâna sau cu maşini de nituit.

49. **Calculul îmbinărilor nituite.** Deşi, cum am văzut' rezistenţa principală a îmbinării este produsă de strângerea nitului, nu avem elemente pentru calculul acesteia. Dacă însă presupunem că forţa ce suportă îmbinarea creşte mereu, ea va învinge strângerea şi frecarea tablelor şi va intra în joc rezistenţa nitului, care lucrează la tăiere, şi presiunea lui pe pereţii găurii. Vom calcula deci niturile la tăiere în una sau mai multe secţii, după cum lucrează, şi vom căuta să aflăm distribuţia niturilor.

Fiecare nit va lua prin urmare o forţă pe care o calculăm prin rezistenţa uniform distribuită în secţia de tăiere. Modul cum se distribue forţa între diferitele nituri, adică partea pe care o ia fiecare nit la suportarea forţei ce lucrează asupra îmbinării, este greu de stabilit. Ne servim pentru diferitele moduri de construcţie de reguli practice. Pe lângă forţe putem avea şi momente, pe care uneori le neglijăm pentru a simplifica calculul.

Prin mişcarea tablelor nitul va da o presiune pe peretele găurii, care este neuniformă din cauză că ea apasă pe jumătate din suprafaţa interioară a găurii, în contra mişcării. Pentru a simplifica lucrurile se ia o presiune uniformă pe suprafaţa proiectată pe diametru, şi s'a găsit prin experienţă că această presiune poate lua o valoare mare

Ipoteza distribuţiei uniforme a rezistenţelor pe diferitele secţii şi pe diferitele nituri este făcută pentru simplificare. Se dovedeşte prin experienţă şi prin calcul, că nu avem distribuţie uniformă şi de aceia *se recomandă a se spori numărul de nituri calculat cu 20%.*

Scanned with OKEN Scanner

Dacă avem o distribuţie oarecare a niturilor, putem să verificăm rezistenţele ce ce produc în diferitele secţii. Avem şi posibilitatea de a modifica distribuţia când valorile rezistenţelor nu sunt mulţumitoare. In general practica a stabilit anume feluri de îmbinare, care se întrebuinţează des.

Se întrebuinţează astfel îmbinări nituite în construcţii metalice, cari au rolul de a transmite forţele, sunt deci îmbinări de rezistenţă. Regulile de construcţie ale lor se vor vedea la construcţiile metalice. Sunt îmbinări nituite la cazane, unde pe lângă rezistenţă trebue să avem şi etanşeitate, şi regulile de construcţie se vor vedea la construcţiile de maşini. Sunt îmbinări nituite la rezervoare, unde rezistenţa este adeseori mică, dar condiţia de etanşeitate este mai importantă.

Diametrul nitului se alege după construcţii existente sau după practică. Se dau şi formule empirice pentru a determina diametrul nitului

$d = \sqrt{5\delta} - 0{,}2$ cm. pentru construcţii metalice

$a = \sqrt{5\delta} - 0{,}4$ cm. pentru rezervoare

50. Calculul îmbinării nituite cu o secţie de tăiere. Două table aşezate una peste alta, se găuresc şi se îmbină cu un rând de nituri (fig. 64). Imbinarea suportă forţa axială transmisă de table, iar niturile sunt supuse la tăiere.

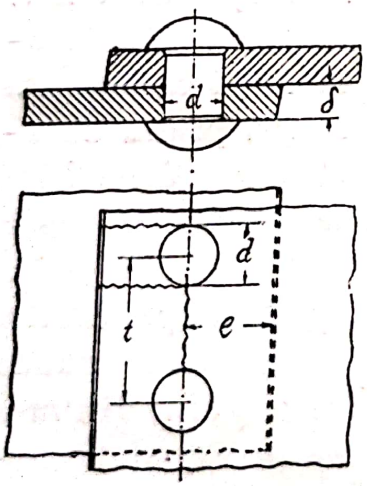


Fig. 64

Unui nit îi revine efortul pe o lăţime egală cu distanţa între nituri. Deci va trebui ca rezistenţa la tăiere a nitului să fie egală cu presiunea pe peretele găurii şi egală cu rezistenţa tablei

$$(t-d)\,\delta\sigma = \frac{\pi d^2}{4}\tau = d\delta\sigma_1$$

şi ştiind că avem $\sigma_1 = 2\sigma, \tau = 0{,}8\,\sigma$

găsim $\frac{\pi}{10}\,d = \delta$

$$t = d\left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma}\right) = 3d$$

Prima condiţie este în general satisfăcută prin alegerea nitului, iar a doua ne dă distanţa între nituri.

La executarea îmbinării trebue să găurim tabla, deci îi slăbim rezistenţa. Secţia totală fiind t, iar cea utilă $t-d$, avem o slăbire $\frac{t-d}{t}$ de care trebue să ţinem seama la calculul tablei. Acest raport, care se mai numeşte şi coeficient de utilizare, este în cazul nostru

$$\frac{t-d}{t}=\frac{3d-d}{3d}=0{,}67$$

Distanţa nitului până la margine se determină din condiţia

$$2eh\tau=\frac{\pi d^2}{4}\tau$$

$$e=\frac{\pi d^2}{8h}\cong 1{,}5\,d$$

dimensie consacrată de experienţă.

Imbinarea cu o singură secţie de tăiere este încărcată desavantajos, pentru că forţele axiale ce lucrează în cele două table dau un moment, care solicită nitul.

Când avem de transmis prin îmbinare forţe mai mari, ne trebuesc mai multe nituri şi atunci le aşezăm pe două sau mai multe rânduri.

51. Calculul îmbinării nituite cu două secţii de tăiere. Cele două table sunt aşezate una lângă alta acoperite cu alte două table numite *eclise*, se găuresc şi se îmbină cu nituri. (fig. 65).

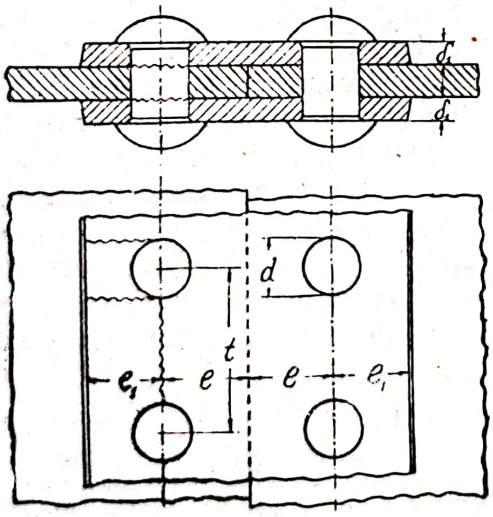


Fig. 65

Se vede că în acest caz, pentru a distruge îmbinarea, trebue să tăiem nitul după două secţii. Unui nit îi revine efortul pe o lăţime t egală cu distanţa între nituri, deci

$$(t-d)\,\delta\sigma=2\frac{\pi d^2}{4}\tau=d\delta\sigma_1$$

şi luând ca mai sus $\sigma_1=2\sigma$, $\tau=0{,}8\,\sigma$ găsim

$$\frac{\pi}{5}d=\delta$$

$$t = d\left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma}\right) = 3d$$

eclisele se iau $\delta_1 = 0{,}8\,\delta$.

Exemplu. O bară diagonală la un pod metalic suportă o tensiune $P = 80$ tone și este îmbinată cu eclise și guseuri. Să se dimensioneze îmbinarea.

Bara diagonală va trebui să aibă o secție

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{80000}{1200} \cong 67 \text{ cm}^2$$

vom alege 340×20 mm, pentru a ține seama de slăbirea ulterioară prin nituire.

Alegem pentru această grosime nituri $d = 25$ mm, diametrul găurilor $d = 26$ mm.

Rezistența nitului în cele două secții de tăiere este

$$R = 2\frac{\pi d^2}{4}\tau_a = 2 \times 4{,}91 \times 1000 = 9820 \text{ kg.}$$

pe când presiunea pe peretele găurii este

$$R' = d\delta\sigma_1 = 2{,}6 \times 2 \times 2400 = 12500 \text{ kg}$$

și vom calcula deci la rezistența cea mai mică, adică la tăiere.

Numărul niturilor este

$$n = \frac{80000}{9820} \cong 8 \text{ nituri}$$

Vom spori numărul de nituri rezultat din calcul la 9, vom lua eclise de grosime $\delta_1 = 0{,}8\ \delta = 16$ mm. și vom face îmbinarea ca în fig. (fig 66), unde facem aranjarea niturilor și dăm distanțele între ele.

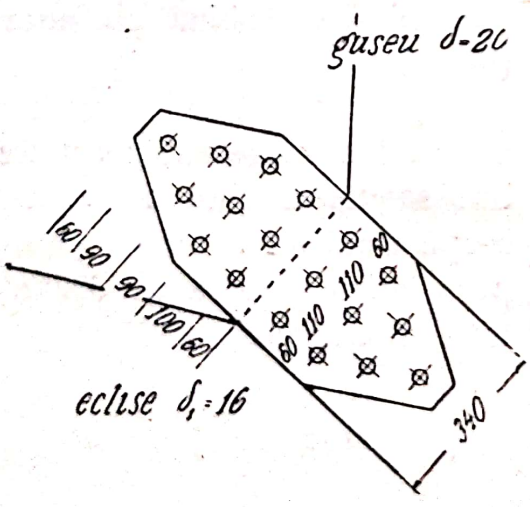


Fig. 66

Verificăm rezistențele în diagonală, luând diferite secții făcute prin găurile de nit, unde tabla este slăbită prin găurire. Vom avea deci în secția ce trece prin prima gaură de nit.

$$\Omega = (34 - 2{,}6)\ 2 = 62{,}8 \text{ cm}^2.$$

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} = \frac{80000}{628} = 1170 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru secția ce trece prin cele două găuri de nit următoare vom scădea din forța ce lucrează rezistența primului nit, prin care s'a transmis o parte din tensiune prin eclise la guseu. Avem deci

$$\Omega_2 = (34 - 2 \times 2{,}6)\ 2 = 57{,}6\ \text{cm}^2.$$
$$P_2 = P - R = 80000 - 9820 = 70180\ \text{kg}$$
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{\Omega} = \frac{70180}{576} = 1270\ \text{kg/cm}^2$$

şi mai departe

$$\Omega_3 = (34 - 3 \times 2{,}6)\ 2 = 52{,}4\ \text{cm}^2$$
$$P_3 = 80000 - 3 \times 8280 = 56540\ \text{kg}.$$
$$\sigma_3 = \frac{P_3}{\Omega} = \frac{56540}{524} = 964\ \text{kg/cm}^2$$

52. Imbinări sudate. Sudura, adică legarea pieselor prin topirea materialului care formează astfel legătura, este întrebuinţată pe scară largă, ca un mijloc îndemănatec de a face îmbinările.

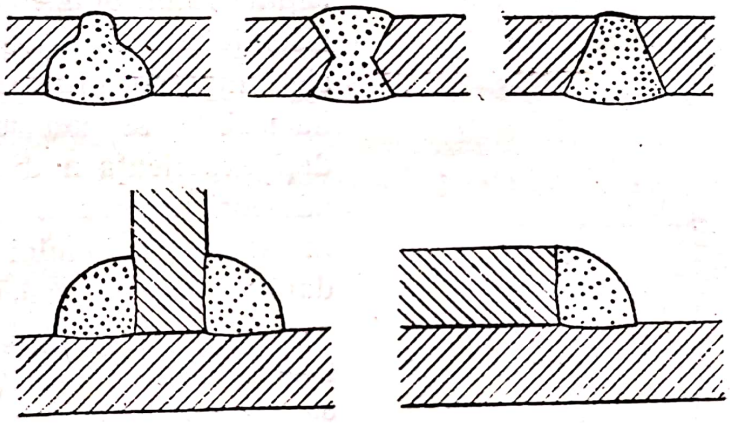


Fig. 67.

Deosebim sudura *cap la cap*, care se face aşezând piesele una în capul celeilalte şi complectând locul cu sudură (fig. 67). Cordonul de sudură care se formează prin topire se numeşte şi *cusătură*, şi ia diferite forme, în *V* cea mai obişnuită, în *X*, în *U* pentru piese groase.

Sudura este *în colţ*, atunci când cordonul de sudură umple unghiul dintre cele două piese (fig. 64).

Cordonul de sudură cap la cap lucrează la întindere şi secţia lui este dată de grosimea *h*. Se consideră în general grosimea piesei însăşi, deşi cordonul este puţin îngroşat prin depunerea materialului, îngroşare care nu se ia în calcul. Secţia care rezistă este deci grosimea × lungimea cordonului.

Scanned with OKEN Scanner

Cordonul de sudură în colţ lucrează la întindere sau la tăiere, după cum se mişcă piesele una faţă de alta. Experienţa a dovedit că secţia minimă, a cărei grosime este notată cu a, este înălţimea triunghiului ce reprezintă cordonul, fără a considera îngroşarea Secţia care reprezintă sudura este deci înălţimea $\times$ lungimea cordonului.

Când o îmbinare se face prin mai multe cordoane de grosime a şi de lungime l, atunci rezistenţa este dată de

$$\sigma = \frac{P}{\Sigma\, a\, l}$$

Dacă îmbinarea este complicată, nu mai putem uşor calcula rezistenţele în diferitele cordoane, dar putem avea o indicaţie prin acest calcul asupra valorilor medii ale rezistenţelor. Pentru a acoperi siguranţa noastră rezistenţele admisibile se iau mai mici, deşi experienţa a dovedit că adeseori ruperea se produce în afara cordonului de sudură.

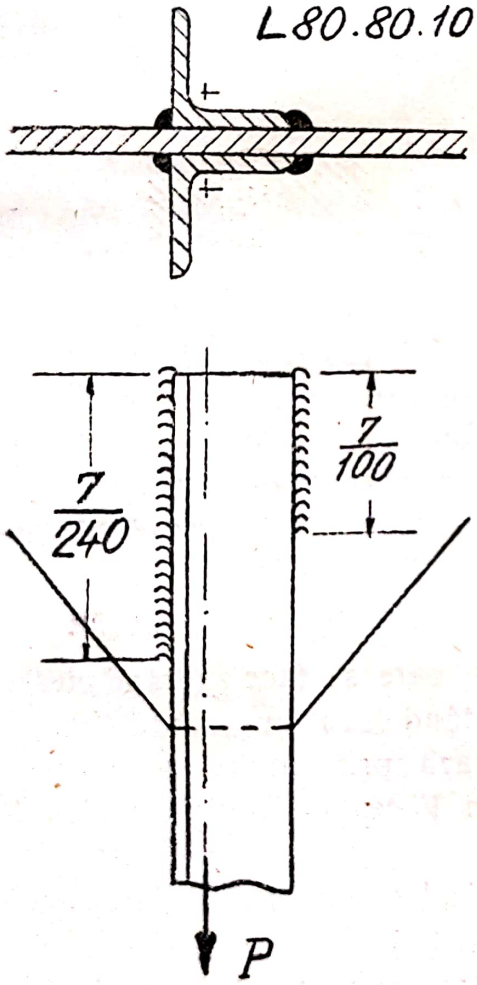


Fig. 68.

Exemplu. Imbinarea unei bare formată din două corniere ⌊ 80 80. 10 pe o placă (fig. 68). Bara noastră poate suporta o forţă

$$P = \Omega\sigma = 2 \times 15{,}1 \times 1400 = 42300 \text{ kg.}$$

cusătura va avea o grosime

$$a = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{10}{1{,}41} = 7{,}07 \text{ mm.}$$

rezistenţa sudurii este

$$\sigma' = 0{,}65 \times 1400 = 910 \text{ kg/cm}^2$$

deci vom avea nevoie de o lungime

$$l = \frac{P}{\sigma' a} = \frac{42300}{910 \times 0{,}7} = 66{,}4 \text{ cm}$$

care trebuie împărţită pe aripile cornierelor, aşa fel ca rezultanta să lucreze în axa barei. Deci

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{5,66'}{2,34}$$

$$l_1 = l\,\frac{a_2}{a_1 + a_2} = 66,4\,\frac{5,66}{8,00} = 46,7 \text{ cm.}$$

$$l_2 = l\,\frac{a_2}{a_1 + a_2} = 66,4\,\frac{7,54}{8,00} = 19,5 \text{ cm.}$$

53. **Imbinări de lemn.** Ele se întrebuinţează la construcţiile de lemn şi ţinând seamă de modul de lucru al acestora nu se poate urmări atâta exactitatea ca la îmbinările metalice. Imbinările se fac prin tăierea lemnului, pentru a se da suprafeţe de contact numite praguri, pe care se urmăreşte a avea rezistenţa admisibilă. Pentru că lemnul are o rezistenţă atunci când sarcina lucrează în direcţia fibrelor şi alta, mult mai mică, atunci când sarcina lucrează normal pe direcţia fibrelor, trebue să se ţină seamă de aceasta interpolând la nevoe, după direcţia pe care o avem.

Pentru a le face mai rigide îmbinările de lemn se leagă cu buloane sau legături de fier, la construcţii provizorii cu scoabe şi cuie.

Exemplu. Să examinăm imbinarea căpriorului cu coarda, dată în figură (fig. 69). Se face de obiceiu cu prag, care se taie pe o treime a lemnului.

Suprafaţa pragului trebue să reziste la compresiune, deci vom avea pentru lemn de stejar

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\sigma a} = \frac{11700}{80} = 146 \text{ cm}^2$$

acest prag îl tăiem în coardă după cum arată figura

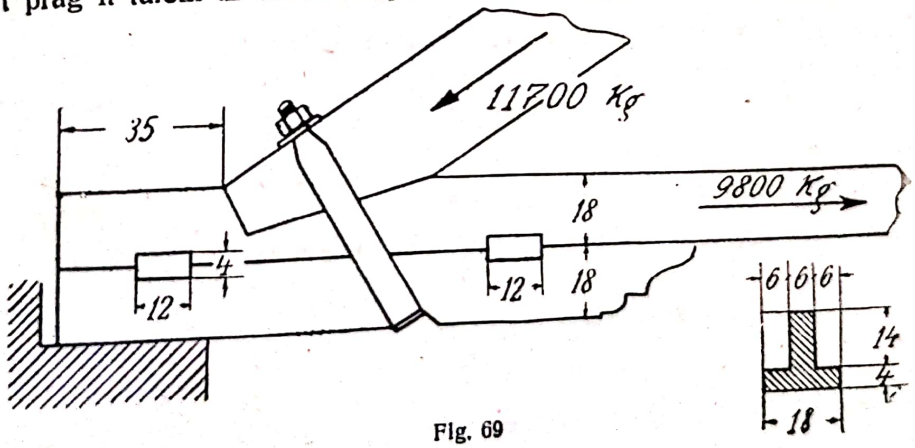


Fig. 69

Suprafaţa de care dispunem este

$$2 \times 6 \times 14 = 168 \text{ cm}^2$$

Secţia coardei care rămâne după tăierea pragului trebue să reziste la tensiune

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\sigma_a} = \frac{9800}{100} = 98 \text{ cm}^2$$

în figură avem $18 \times 18 - 14 \times 6 \times 2 = 156 \text{ cm}^2$

Distanţa ce o lăsăm până la margine pentru forfecare trebue să fie

$$\Omega_{nec} = \frac{P}{\tau_a} = \frac{9800}{10} = 98 \text{ cm}^2$$

şi avem

$$2\,(14 + 6)\,l = 980 \qquad l \cong 25 \text{ cm.}$$

pentru siguranţă vom lua $l = 35$ cm.

Ca detalii de construcţie se poate adăuga o legătură de fier şi penele care să lege cu grinda de jos pentru o rigiditate mai mare a nodului.

Scanned with OKEN Scanner

Cap. V. Momente încovoietoare și forțe tăietoare

§ 1. Definiții.

54. **Grindă dreaptă.** Se numește grindă dreaptă o piesă a cărei axă este o linie dreaptă. Axa grinzii este locul centrelor de greutate ale secțiilor transversale, iar aceste secții sunt normale pe axă. Secția transversală poate fi constantă sau variabilă, ceiace hotărăște aspectul grinzii. In primul caz, secție constantă, conturul grinzii este format tot din linii drepte paralele cu axa și vedem o grindă dreaptă: în al doilea caz, secție variabilă, conturul grinzii poate fi format din linii drepte sau curbe, vedem o grindă de o formă oarecare, dar dacă axa ei este dreaptă noi o socotim o grindă dreaptă.

Ne alegem ca axă de referință axa grinzii, la care raportăm toate elementele de calcul. Considerăm că lungimea grinzii, care se socotește după axă, este mare față de dimensiile secției transversale. Vom studia deformația axei grinzii și vom neglija deformația secției transversale, ale cărei dimensii le socotim neglijabile față de lungimea grinzii.

Vom studia la grinzile drepte:

Forțele interioare și variația lor dealungul axei grinzii,

Rezistențele produse în secție și variația acestor rezistențe în diferitele secții transversale,

Influența formei secției asupra rezistenței lor,

Deformația axei grinzii sub acțiunea rezistențelor.

55. **Sarcinile ce lucrează asupra grinzilor, reacțiuni, reazeme.** Rostul grinzilor fiind de a întocmi elemente de construcție care să transmită forțe, vom avea să studiem aceste forțe, pe care le numim *sarcini.*

Scanned with OKEN Scanner

O sarcină ce lucrează asupra grinzii este greutatea proprie, care lucrează mereu asupra oricărei părţi a ei. Este un exemplu de *sarcină permanentă.*

Sarcinile pot fi şi *mobile*, de exemplu trenul, autocamioanele, căruţele, care nu lucrează mereu şi care îşi schimbă poziţia.

Sarcinile pot fi *întâmplătoare*, care nu lucrează folositor pentru noi, dar de care trebue totuşi să apărăm construcţia. Zăpada, vântul, viituri mari de ape, sunt exemple. Vorbim în acest caz şi de sarcini accidentale.

Din alt punct de vedere sarcinile pot fi *statice* şi *dinamice*. Considerăm sarcini statice, greutatea, presiunea, acelea la care nu se produc schimbări, sau aceste schimbări sunt foarte încete. Sarcinile dinamice ce se întâlnesc la piesele de maşini, lucrează asupra pieselor cu viteză, dând prin acceleraţie valori mari forţelor ce se transmit.

Din punct de vedere al calculului avem împărţirea sarcinilor în *concentrate* şi *distribuite.*

Deşi sarcinile ce lucrează asupra grinzii se transmit cu ajutorul unei piese, deci sunt distribuite pe o suprafaţă, totuşi când această suprafaţă este mică, zicem că sarcina este *concentrată* şi lucrează într'un punct. Astfel sarcina transmisă printr'o roată lucrează pe suprafaţa mică de contact între roată şi şină şi o considerăm concentrată trecând prin punctul de contact şi prin centrul roţii; sarcina transmisă de un stâlp o considerăm concentrată şi lucrând în axa stâlpului.

Când însă sarcina lucrează pe o suprafaţă mare, în orice punct al ei, nu o mai putem înlocui cu rezultanta. Avem o sarcină *distribuită* şi de obicei *uniform distribuită.* Putem avea însă sarcini distribuite oricum.

Sarcinile pot fi *directe*, adică lucrând direct asupra grinzii, şi pot lucra şi prin intermediul altor piese adică pot fi *indirecte.* Astfel sarcina dela roţi se transmite la şini, pe urmă la traverse şi prin alte elemente de construcţie la grinda podului. Modul de calcul se schimbă, influenţa sarcinilor fiind schimbată când ele lucrează indirect.

Toate aceste sarcini sunt *date*, cunoscute, de îndată ce avem dată construcţia şi modul de lucru al grinzii. Dar grinda noastră este legată de alte piese, se reazemă pe ele, şi din a-

Scanned with OKEN Scanner

ceste legături apar noi forţe, *reacţiunile.* Reacţiunile atârnă de rezemele întrebuinţate.

Reazemul articulat este format dintr'o articulaţie care permite rotaţia în jurul punctului. Reacţiunea este atunci o forţă de direcţie şi valoare care urmează să fie determinate şi care trece prin acel punct fix.

Reazemul mobil este format dintr'un cărucior care se mişcă pe un plan. Reacţiunea este atunci perpendiculară pe plan, de direcţie cunoscută şi a cărei mărime urmează să fie determinată.

Reazemul înţepenit este acela fixat complect, aşa în cât axa grinzii nu se poate nici roti nici deplasa. Reacţiunea este atunci dată de un moment şi o forţă de direcţie şi mărime ce urmează a fi determinate, deci trei necunoscute.

Aceste reacţiuni (fig 70) fiind forţe care lucrează asupra grinzii trebuesc determinate, adică trebuesc aflate mărimile şi direcţiile forţelor pe care ele le produc.

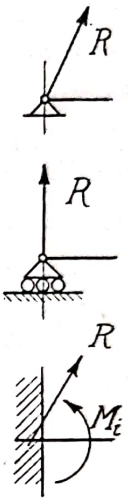


Fig. 70

56. **Condiţiile de echilibru.** Grinda noastră dreaptă, încărcată cu diferite sarcini şi rezemată în diferite feluri, trebue să îndeplinească condiţiile de echilibru din mecanică. Atât grinda, cât şi diferite părţi ale ei, trebuesc să fie în echilibru.

In primul rând reacţiunile trebue să aibe valorile ce asigură echilibrul şi ne vom servi de ecuaţiile de echilibru pentru a afla aceste reacţiuni. Aceste ecuaţii ne spun că rezultanta şi momentul rezultant al tuturor forţelor ce lucrează asupra grinzii trebuesc să fie nule. Deci avem în spaţiu şase condiţii iar în plan trei condiţii de echilibru.

Rezultă deci că nu vom putea avea reazeme care să ne dea mai multe necunoscute, nici mai puţine, decât cer condiţiile de echilibru. Pentru problema plană vom avea deci trei necunoscute, care sunt deci echivalente cu un reazem înţepenit, sau cu două reazeme, unul articulat celalt mobil.

Grinzile cari au numărul de reazeme, cu necunoscutele cerute de ecuaţiile de echilibru, aşa ca să putem calcula toate aceste reacţiuni, sunt *grinzi static determinate* şi ne vom ocupa de ele în primul rând. Grinzile cari au numărul de reazeme cu

Scanned with OKEN Scanner

necunoscutele mai numeroase decât cele cerute de ecuaţiile de echilibru, nu le putem calcula acum. Ele sunt *static nedeterminate* şi le vom studia mai târziu.

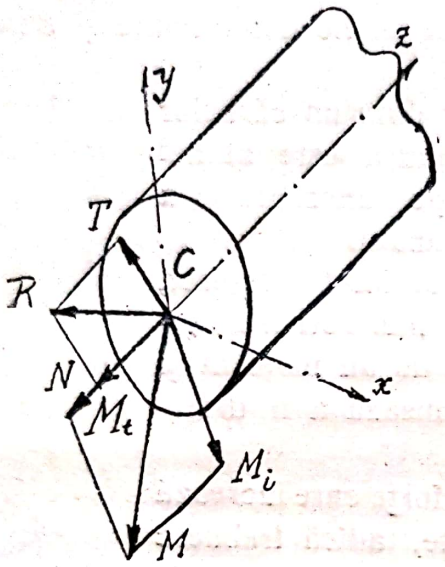


Fig. 71

Dar nu numai toată grinda îndeplineşte condiţiile de echilibru ci şi fiecare parte a ei, supusă forţelor interioare care se desvoltă, trebue să îndeplinească aceleaşi condiţii.

Dacă deci în grinda noastră (fig. 71) considerăm un punct *C* pe axă şi secţia transversală în acest punct, care împarte grinda în două bucăţi, va trebui să punem condiţia că aceste două bucăţi sunt în echilibru. Pentru a asigura echilibrul trebue ca în puctul *C*, centrul de greutate al secţiei considerate, să introducem forţele interioare care asigură echilibrul. Acestea sunt, precum ştim din mecanică, un moment *M* şi o rezultantă *R*. Ele sunt complect determinate prin cele şase componente ale lor, de cele şase ecuaţii ale lor, care cer ca bucata din dreapta de ex. să fie în echilibru.

Dacă deci din punctul *C* considerăm rezultanta *R* şi momentul *M* faţă de trei axe care sunt axa grinzii şi două axe perpendiculare conţinute în secţia transversală din *C*, vom avea componentele lor faţă de axa grinzii în secţia transversală.

N, componenta rezultantei pe axă, întindere sau compresiune,

T, componenta rezultantei pe secţia transversală, forţa tăietoare,

M_t, componenta momentului pe axă, moment de răsucire,

M_i, componenta momentului pe secţia transversală, moment încovoietor.

Dacă considerăm bucata din stânga vom găsi prin acelaş raţionament aceleaşi elemente. Ele trebue să fie egale şi de semne contrare, ca forţe interioare, pentru ca echilibrul punctului *C* să fie asigurat. Va trebui deci să găsim aceleaşi elemente fie că am lua bucata din stânga, fie cea din dreapta.

Asupra semnelor vom face mai departe o convenţie care să ne ajute la calcul.

Dacă reunim cele două bucăţi, din dreapta şi din stânga vom găsi cele două rezultante egale şi direct opuse, cele două momente egale şi direct opuse, deci echilibrul este restabilit. Şi componentele acestora, date mai sus, se găsesc perechi egale şi direct opuse.

Cazul general se întâlneşte foarte rar, şi de aceia ne vom ocupa mai de aproape de cazul când toate forţele sunt într'un plan, plan care conţine axa grinzii. Rezultanta este atunci în acest plan, care se numeşte planul forţelor. Un caz şi mai des întâlnit este când toate forţele sunt verticale.

Vom examina cazurile plane şi din compunerea pe două plane putem afla cazul general.

§ 2. Momente încovoietoare şi forţe tăietoare.

57. Definiţii. Să luăm o grindă dreaptă încărcată cu sarcini, care sunt toate cuprinse în planul vertical în care este şi axa grinzii. Sarcinile date ne dau prin ecuaţiile de echilibru valorile reacţiunilor, aşa în cât cunoaştem toate forţele ce lucrează asupra grinzii.

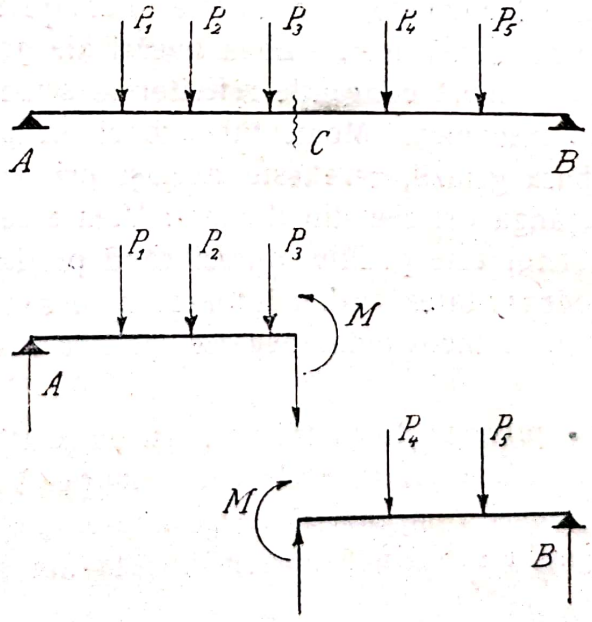


Fig. 72

Să tăiem grinda în două printr'o secţie oarecare C (fig. 72).

Forţele interioare ce lucrează în acest punct se reduc la o rezultantă, conţinută în planul vertical, şi la un moment, a cărui axă este normală pe acest plan.

Rezultanta ne dă o componentă N după axa grinzii, care este întindere sau compresiune, şi altă componentă T conţinută în secţia transversală, care este forţa tăietoare. Momentul normal pe planul forţelor, având axa conţinută în planul secţiei transversale este deci un moment încovoietor.

Dacă sarcinile sunt toate verticale, şi reacţiunile reazemelor vor fi verticale, nu avem decât moment încovoietor şi forţă tăietoare.

Atât bucata din stânga cât şi cea din dreapta trebuesc să fie în echilibru sub acţiunea forţelor, atât a celor exterioare cât şi a celor interioare. Intrebuinţând condiţiile de echilibru vom găsi:

momentul încovoietor în o secţie oarecare este momentul tuturor forţelor lucrând asupra bucăţii din stânga (*sau dreapta*), deoarece aşa cere ecuaţia momentelor pentru ca echilibrul bucăţii din stânga (sau dreapta) să fie asigurat.

Dacă luăm ecuaţia de proecţii pe verticală vom găsi:

forţa tăietoare în o sectie oarecare este suma tuturor forţelor lucrând asupra bucăţii din stânga (*sau dreapta*).

Momentele încovoietoare şi forţele tăietoare fiind egale şi de semne contrare, pentru cele două bucăţi ale grinzii, va trebui să facem o nouă convenţie referitor la semne, diferită de cea admisă în mecanică. Momentul încovoietor produce o deformaţie, curbura grinzii, care este aceiaşi ori vom considera bucata din stânga ori cea din dreapta: Vom zice deci că momentul încovoietor este pozitiv, atunci când produce o curbură pozitivă, cu concavitatea curbei întoarsă spre axele pozitive, şi vom numi moment încovoietor negativ, pe acela care produce o curbură negativă.

In ceiace priveşte forţa tăietoare şi ea arată două semne deosebite, dar nu mai avem aceiaşi deformaţie. Vom alege bucata din dreapta şi vom zice că forţa tăietoare e pozitivă când lucrează de jos în sus. Dacă alegem bucata din stânga semnul se schimbă.

58. Relaţia între momentul încovoietor şi forţa tăie-

toare. Să luăm o bucată din grinda noastră, separată prin două secţii la distanţa dx (fig. 73). In cele două secţii lucrează câte un moment încovoietor şi o forţă tăietoare, provenite din acţiunea părţilor ce le-am îndepărtat. In stânga vom lua momentul şi forţa tăietoare cu sensurile lor pozitive. In dreapta valorile acestora vor creşte cu elementul diferenţial corespunzător şi tot cu sensul pozitiv. Pe grindă luăm o sarcină p uniform distribuită.

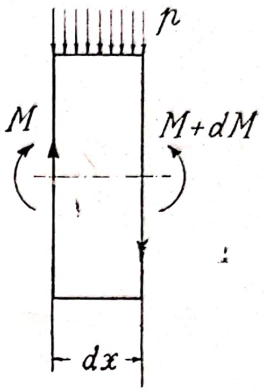


Fig. 73

Dacă scrim echilibrul avem

$$M-(M+dM)-pdx\frac{dx}{2}+Tdx=0$$

$$pdx-T+T+dT=0$$

din aceste relaţii scoatem

$$\frac{dM}{dx}=T$$

adică derivata momentului încovoietor este egală cu forţa tăietoare. Şi

$$\frac{dT}{dx}=-p$$

derivata forţei tăietoare este egală cu minus sarcina

Putem scrie aceste două relaţii într'una singură.

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dT}{dx}=-p$$

Vom întrebuinţa aceste relaţii pentru a deduce unele din altele M sau T.

Legătura între M, T, p, apare şi grafic în diagrama alăturată (fig. 74), şi ne ajută să desenăm punctele principale ale acestei diagrame.

După cum se vede, momentul încovoietor şi forţa tăietoare variază dela o secţie la alta, păstrând între ele o anumită legătură. Pentru studiul grinzii este nevoie a urmări variaţia momentului încovoietor şi a forţei tăietoare, a afla valorile lor remarcabile, maxime sau nule, şi acestea sunt legate între ele. Cunoaşterea momentelor încovoietoare şi a forţelor tăietoare se

Scanned with OKEN Scanner

poate face scriind după definiţie valorile lor, cu ajutorul ecuaţiilor de echilibru; este calea analitică. Dar când forţele sunt numeroase, în cazuri mai complicate, ne servim de calculul grafic desenând variaţia momentelor cu ajutorul poligonului funicular şi obţinând ceiace se numeşte *diagrama* momentelor încovoietoare şi a forţelor tăietoare. Aceste diagrame sunt foarte folositoare pentru calcul, se desenează uşor, şi sunt foarte îndemânatice pentru rezolvarea problemelor referitoare la grinzi. De aceia vom urmări aceste diagrame pentru diferitele cazuri de sarcini şi ne vom rezema în calcule pe rezultatele astfel câştigate.

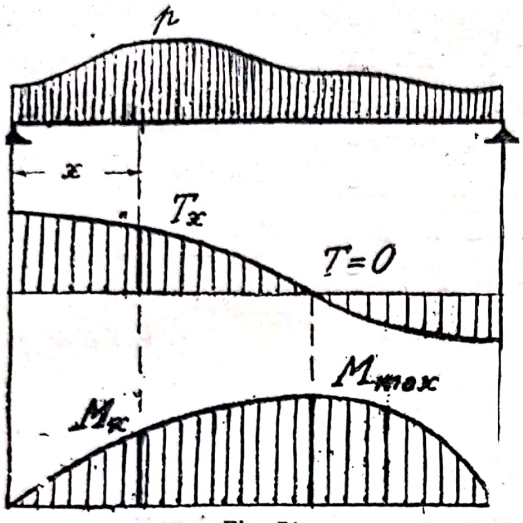


Fig. 74

59. **Sarcini permanente.** Când sarcinile sunt permanente, ocupând poziţii fixe pe grindă, putem uşor să urmărim momentele încovoietoare şi forţele tăietoare, precum şi variaţia lor în diferite secţii. Vom urmări deci diagramele pentru sarcini concentrate şi distribuite, pentru cele două grinzi static determinate: grinda înţepenită şi grinda rezemată.

a) Grinda înţepenită, sarcina concentrată. Dacă luăm o singură sarcină P la capătul grinzii atunci după definiţiile de mai sus într'o secţie C, definită prin distanţa x dela capătul grinzii, vom avea

$$M_x = - Px$$

$$T_x = P$$

Am dat momentului semnul minus, pentru că deformaţia grinzii ne arată curbura în jos pe care o numim negativă. Forţa tăietoare are semnul plus.

Când schimbăm secţia C,

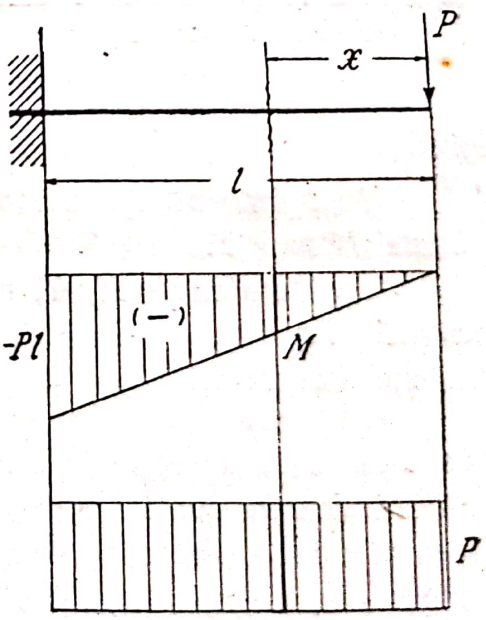


Fig. 75

adică atunci când x variază, momentul încovoietor variază liniar, şi este maxim la înţepenire.

$$M_{max} = -Px$$

Forţa tăietoare este constantă dealungul grinzii (fig. 75).

b) Grindă înţepenită, sarcina uniform distribuită. Procedând în acelaş mod vom putea scrie pentru secţia C, la distanţa x

$$M_x = -\frac{px^2}{2}$$

$$T_x = px$$

Se vede că momentul încovoietor variază după o parabolă, forţa tăietoare după o linie dreaptă (fig. 76). Valorile maxime se găsesc la înţepenire şi sunt

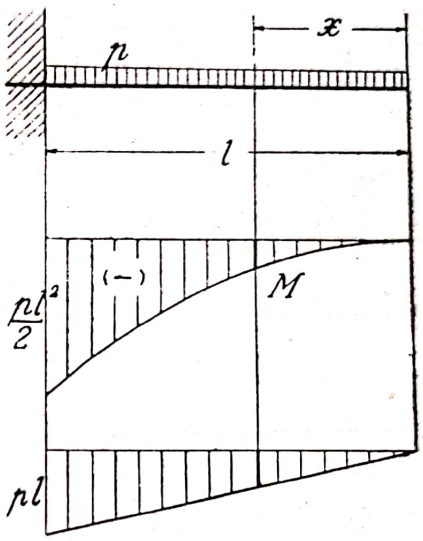


Fig. 76

$$M_{max} = -\frac{pl^2}{2}$$

$$T_{max} = pl$$

c) Grinda înţepenită, sarcină distribuită liniar. Să luăm P sarcina totală distribuită după un triunghiu (fig. 77). Sarcina ce revine porţiunii x este atunci

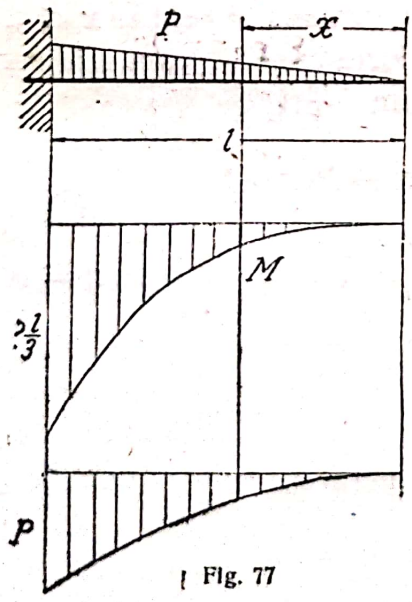


Fig. 77

$$P_x = P\frac{x^2}{l^2}$$

şi lucrează în centrul de greutate al triunghiului. După definiţie vom avea

$$M_x = -P_x\frac{x}{3} = -\frac{Fx^3}{3l^2}$$

$$T_x = P\frac{x^2}{l^2}$$

Se vede că momentul încovoietor variază după o parabolă cubică, forţa tăietoare după o parabolă. Valorile maxime sunt la înţepenire

Scanned with OKEN Scanner

$$M_{max} = -\frac{Pl}{3} \quad , \quad T_{max} = P$$

d) Grindă rezemată, sarcină concentrată. Să luăm o singură sarcină aşezată pe grindă într'un punct dat prin distanţele a, b, la cele două reazeme. Luând o secţie C la distanţa x dela reazemul din stânga (fig 78), şi voind să aflăm momentul forţelor ce lucrează asupra bucăţii din stânga, vedem că ne trebuesc reacţiunile.

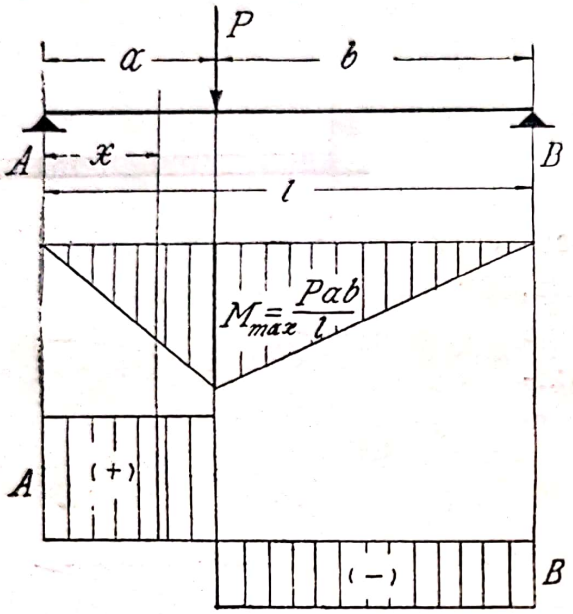


Fig. 78

$$A = \frac{Pb}{l} \quad , \quad B = \frac{Pa}{l}$$

$$A + B = P$$

Momentul încovoietor în secţia x este atunci, după definiţie, întrucât avem la stânga numai forţa A,

$$M_x = Ax = \frac{Pb}{l}x$$

semnul momentului este pozitiv, pentru că deformaţia produsă, adică curbura, este întoarsă în sus, spre y pozitiv.

Momentul încovoietor variază liniar, dar această variaţie nu este valabilă decât până în dreptul sarcinei P, pentru $x < a$. Dacă secţia trece dincolo, avem două forţe care lucrează asupra bucăţii din stânga, deci trebuie să scrim

$$M_x' = Ax - P(x - a) = \frac{Pb}{l}x - P(x - a)$$

adică tot liniar. Momentul încovoietor este maxim pentru $x = a$, şi anume

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}$$

In intervalul b momentul încovoietor se mai poate scrie

$$M_x' = \frac{Pb}{l}x - P(x - a) = \frac{Pa}{l}(l - x) = B(l - x) = Bx'$$

adică tocmai momentul reacţiunii din B, considerând acum bucata din dreapta.

Forţa tăietoare în secţia x este

$$T_x = A = \frac{Pb}{l}$$

deci constantă şi cu semnul pozitiv. Dacă trecem dincolo de forţa P trebue însă să scrim

$$T_x' = A - P = \frac{Pb}{l} - P = -B$$

forţa tăietoare devine deci negativă. Forţa tăietoare a schimbat semnul, iar momentul a trecut printr'un maxim.

Dacă avem mai multe sarcini concentrate P_1, P_2, P_3,... la distanţele a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3,... vom proceda în acelaş mod. Reacţiunile sunt

$$A = \frac{\Sigma Pb}{l} \quad , \quad B = \frac{\Sigma Pa}{l}$$

iar momentul încovoietor variază liniar pe intervalul între două sarcini, pe când forţa tăietoare este constantă în acest interval. Vom scrie deci

$$M_x = Ax = \frac{\Sigma Pb}{l} x$$

$$M_x' = Ax - P_1(x - a_1)$$

$$M_x'' = Ax - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2)$$

$$T_x = A$$

$$T_x' = A - P_1$$

Pentru un număr mai mare de sarcini calculul devine mai complicat şi nu putem vedea uşor unde este momentul încovoietor maxim. Se tratează de preferinţă problema grafic cu ajutorul poligonului funicular, obţinând direct diagrama.

Pentru aceasta construim poligonul forţelor P_1, P_2, P_3,... la scara aleasă, şi luăm o distanţă polară H. Ducând razele 1, 2, 3,.... construim poligonul funicular a cărui linie de închidere este s (fig. 79) Ştim că două laturi şi forţa pe care se reazemă, de ex. 3, P_3, 4 sunt în echilibru, pentru că în poligonul

forţelor aceste laturi formează un triunghiu închis. Laturile 1, *A*, *s* şi 6, *B*, *s* trebuie de asemenea să fie în echilibru. Ducând deci în poligonul forţelor paralela la linia de închidere *s*, am

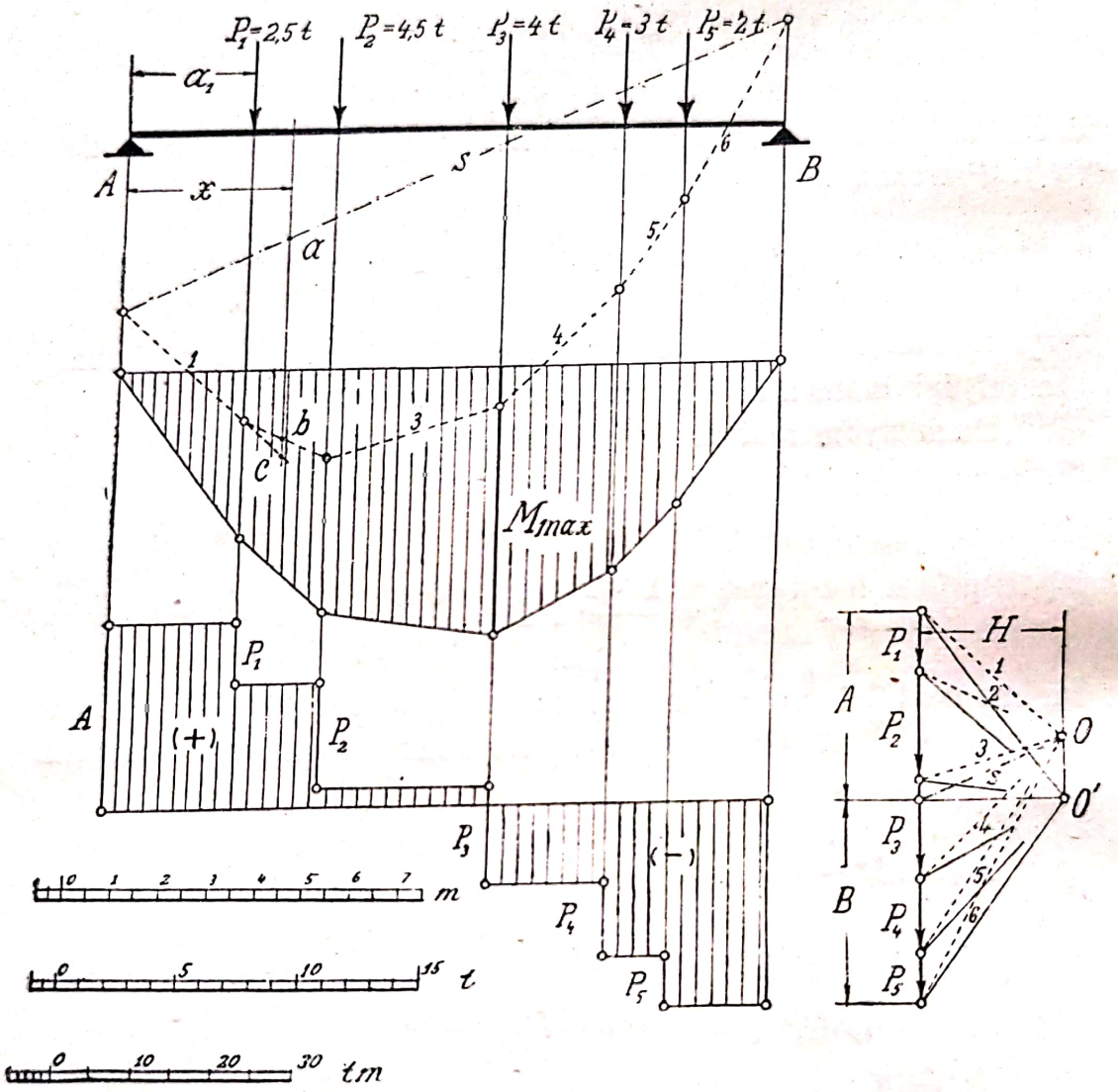


Fig. 79

determinat reacţiunile *A* şi *B*. Forţele fiind în echilibru, atât poligonul forţelor, cât şi poligonul funicular, se închid.

Cu ajutorul poligonului funicular aflăm şi momentul încovoietor. Pentru o secţie la distanţa *x* momentul este dat de segmentul *ab* din figură, segment limitat de laturile corespunzătoare ale funicularului. In adevăr avem din triunghiuri asemenea

$$\frac{ac}{x} = \frac{A}{H}, \quad \frac{bc}{x - a_1} = \frac{P_1}{H}$$

aşa că

$$ab = ac - bc = \frac{1}{H}[Ax - P_1(x - a_1)] = \frac{M}{H}$$

Segmentul ab înmulţit cu distanţa polară ne dă deci momentul încovoietor în secţie.

Pentru ca linia s să fie orizontală, refacem poligonul funicular cu un alt pol şi avem astfel diagrama, care reprezintă variaţia momentului încovoietor. Momentul încovoietor maxim se găseşte totdeauna în dreptul unei forţe.

Diagrama forţelor tăietoare o putem desena cunoscând reacţiunile şi obţinem diagrama în scară. Când momentul încovoietor descreşte forţele tăietoare devin negative.

Pentru exemplul din figură putem calcula şi analitic.

Exemplu:

Vom determina întâi reacţiunile.

$$A = \frac{2{,}5 \times 11{,}3 + 4{,}5 \times 9{,}5 + 4 \times 5{,}9 + 3 \times 3{,}4 + 2 \times 2{,}1}{14} = 7{,}785 \text{ t}$$

$$B = \frac{2{,}5 \times 2{,}7 + 4{,}5 \times 4{,}5 + 4 \times 8{,}1 + 3 \times 10{,}6 + 2 \times 11{,}9}{14} = 8{,}215 \text{ t}$$

şi pe urmă vom putea scrie momentele în dreptul forţelor

$M_1 = 7{,}785 \times 2{,}7 = 20{,}99$ tm

$M_2 = 7{,}785 \times 4{,}5 - 2{,}5 \times 1{,}8 = 30{,}53$

$M_3 = 7{,}785 \times 8{,}1 - 2{,}5 \times 5{,}4 - 4{,}5 \times 3{,}6 = 33{,}35$

$M_4 = 7{,}785 \times 10{,}6 - 2{,}5 \times 7{,}9 - 4{,}5 \times 6{,}1 - 4 \times 2{,}5 = 25{,}32$

sau

$M_5 = 8{,}215 \times 2{,}1 = 17{,}25$ tm

$M_4 = 8{,}215 \times 3{,}4 - 2 \times 1{,}3 = 25{,}33$

$M_3 = 8{,}215 \times 5{,}9 - 2 \times 3{,}8 - 3 \times 2{,}5 = 33{,}36$

căci trebuie să obţinem aceleaşi valori dacă luăm bucata din dreapta sau cea din stânga.

e) Grinda rezemată, sarcină uniform distribuită. (fig. 80). Aci din motive de simetrie, reacţiunile sunt egale

$$A = B = \frac{pl}{2}$$

După definiţie vom scrie

$$M_x = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{px}{2}(l - x)$$

$$T_x = \frac{pl}{2} - px = \frac{p}{2}(l - 2x)$$

momentul încovoietor variază după o parabolă, iar forţa tăie-

toare după o linie dreaptă. Când forţa tăietoare se anulează, în mijloc, atunci momentul încovoietor este maxim

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8}$$

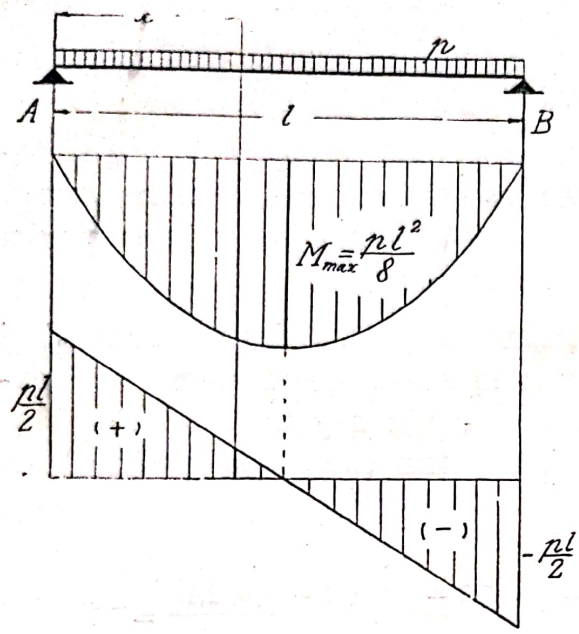


Fig. 80

In jumătatea a doua a grinzii momentul încovoietor descreşte, de aceia şi forţa tăietoare ia semnul negativ.

Dacă sarcina uniform distribuită este numai pe o porţiune λ, cu poziţia dată prin distanţele la reazeme, (fig. 81), atunci reacţiunile sunt aceleaşi ca la rezultanta $p\lambda$, adică

$$A = \frac{p\lambda . l}{l}\ ,\quad B = \frac{p\lambda c}{l}$$

iar momentul încovoietor va varia după o linie dreaptă în porţiunea ne încărcată şi după o parabolă în porţiunea încărcată. Vom scrie

$$M_x = Ax = \frac{p\lambda d}{e}\,x$$

$$M_x' = Ax - p(x-a)\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{p\lambda d}{2}\,x - p\frac{(x-a)^2}{2}$$

Forţa tăietoare va varia după o linie dreaptă în porţiunea încărcată, şi va rămâne constantă în porţiunea neîncărcată. Vom scrie

$$T_x = A = \frac{p\lambda d}{l}$$

$$T_x' = A - p(x-a)$$

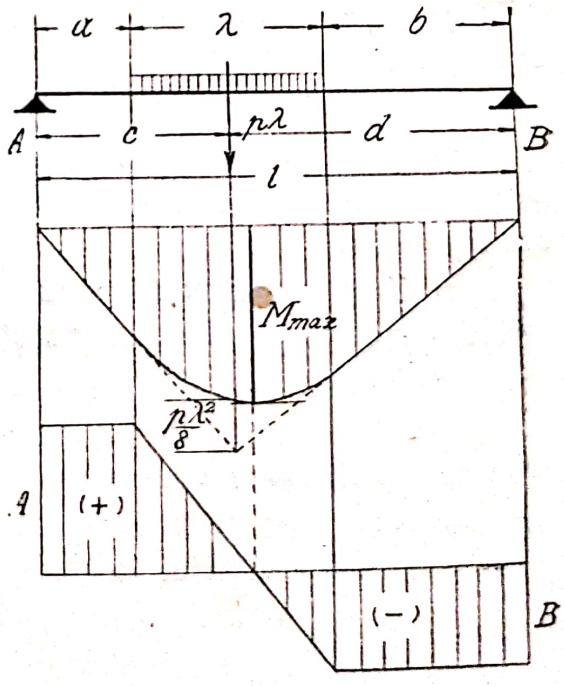


Fig. 81

Momentul încovoietor este maxim în punctul unde forţa tăietoare se anulează adică la distanţa

$$x_1 = a + \frac{A}{p} = a + \frac{\lambda d}{l}$$

iar valoarea momentului maxim este

$$M_{max} = \frac{p\lambda d}{l}\left(a + \frac{\lambda d}{2l}\right)$$

Din cercetarea diagramelor momentelor încovoietoare şi forţelor tăietoare pentru sarcinele permanente găsim următoarele reguli:

Diagrama momentelor încovoietoare variază după o linie dreaptă pentru sarcinile concentrate, variaţia schimbă cu fiecare forţă ce lucrează pe grindă, maximul nu poate fi decât în dreptul unei sarcini. Pentru sarcina uniform distribuită variaţia este după o parabolă în porţiunile încărcate, pe când în porţiunile neîncărcate variaţia rămâne liniară, maximul nu poate fi decât în porţiunea încărcată.

Diagrama forţelor tăietoare variază în scară pentru sarcinile concentrate, forţa tăietoare fiind constantă în intervalul dintre două sarcini şi schimbând valoarea la fiecare forţă ce lucrează pe grindă. Pentru sarcina uniform distribuită variaţia este după o linie dreaptă în porţiunea încărcată, pe când în porţiunea neîncărcată forţa tăietoare rămâne constantă.

Aceste reguli ne pot servi pentru a desena direct diagrama într'un caz de încărcări permanente date, a căuta regiunea în care vom putea găsi momentul încovoietor maxim şi la nevoe prin aplicarea definiţiilor, vom putea scrie orice valoare a momentului încovoietor sau forţei tăietoare.

60. **Sarcini indirecte.** Să luăm cazul unei sarcini ce lucrează indirect, adică pe o grindă secundară, rezemată la rândul ei pe grinda principală. Deschiderea grinzii secundare se numeşte *panou*, iar punctele ei de reazem sunt *nodurile*. Este uşor de văzut că grinda principală nu este astfel încărcată de cât în dreptul nodurilor.

a) *Sarcină concentrată.* Momentul încovoietor în orice secţie din panourile neîncărcate este momentul reacţiunii, care este acelaş, căci nu depinde de modul cum lucrează sarcina

direct sau indirect. Deci variaţia momentului încovoietor va fi acea cunoscută, după triunghiu (fig. 82).

In panoul încărcat însă momentul încovoietor va fi

$$M_x = Ax - P'(x - a')$$

în care P' este componenta sarcinei pe reazemul din stânga al panoului, iar a' este distanţa la acest reazem, care este tocmai numărul respectiv de panouri.

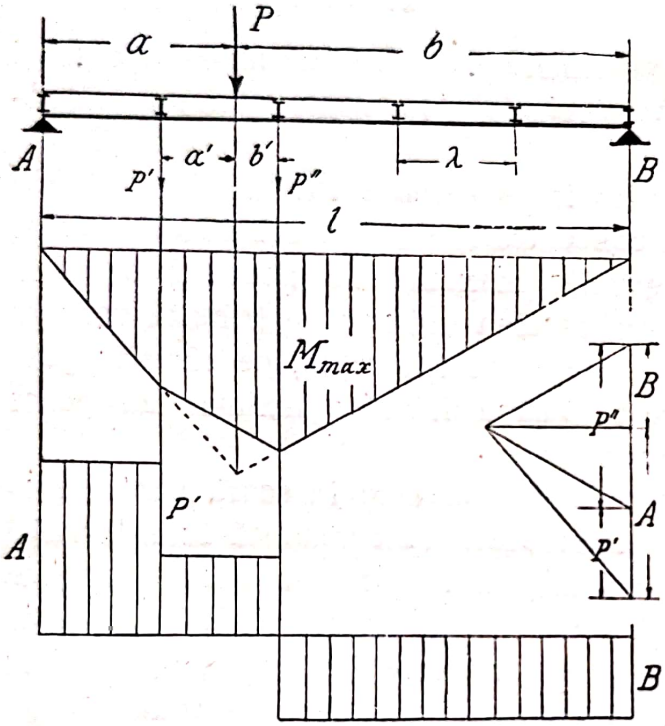


Fig. 82

Momentul încovoietor variază deci după o linie dreaptă şi singura linie este aceia ce uneşte momentele încovoietoare găsite în dreptul nodurilor.

Momentele încovoietoare în dreptul nodurilor sunt aceleaşi pentru sarcina directă şi indirectă, căci dispare momentul componentei P'. Vom putea deci desena uşor diagrama momentelor încovoietoare pentru sarcina indirectă, găsind momentele în dreptul nodurilor la fel ca pentru sarcina directă.

Forţa tăietoare în panourile neîncărcate este egală cu reacţiunea, ca şi pentru sarcinile directe. In panoul încărcat vom avea

$$T_x = A - P'$$

şi rămâne iarăşi constantă.

Se poate vedea că forţa tăietoare în panou poate fi nulă atunci când reacţiunea reazemului este egală cu componenta sarcinei în nod, ceiace se poate întâmpla pentru o anumită poziţie a sarcinei pe grindă.

Dacă avem mai multe sarcini care lucrează pe grindă, vom putea repeta aceste reguli: vom afla momentele încovoietoare ducând funicularul 1, 2, 3, 4, 5, 6 care ne dă momentele în

dreptul nodurilor (fig. 83). In interiorul panourilor momentul încovoietor nu poate varia decât liniar, deci vom obţine linia 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, care ne dă variaţia momentelor încovoietoare în interiorul panourilor. Momentul încovoietor maxim se găseşte

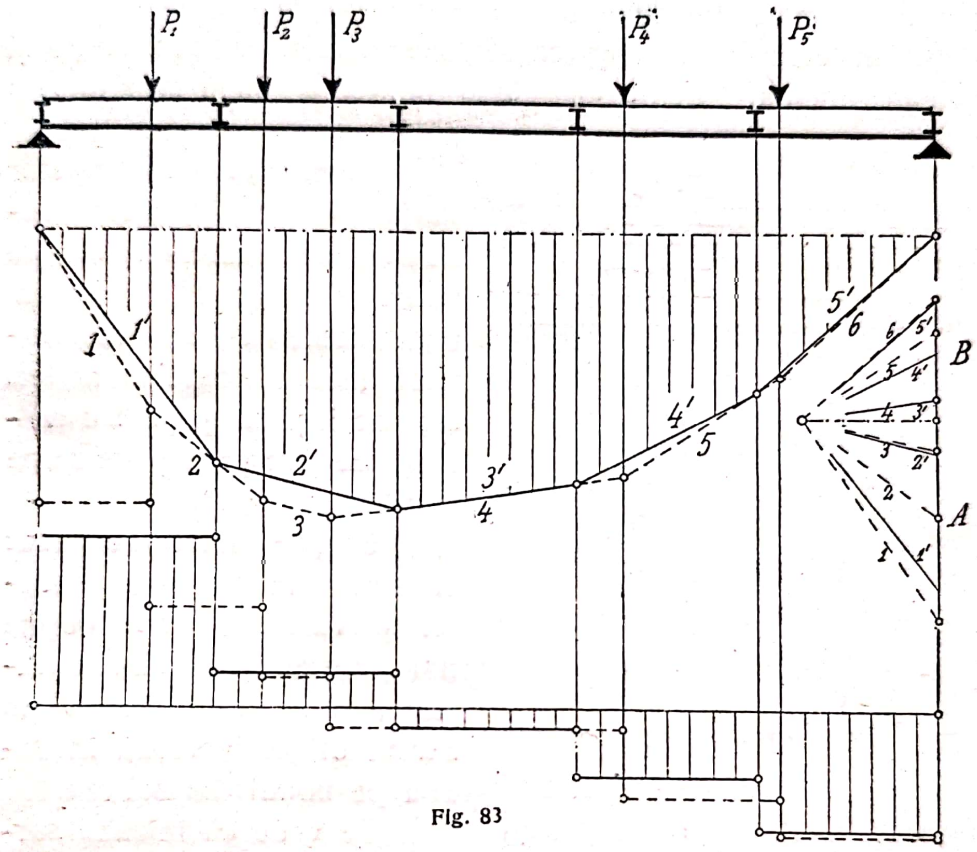


Fig. 83

pe figură în dreptul unui nod şi anume acolo unde forţa tăietoare schimbă semnul.

Ducând în poligonul forţelor laturile corespunzătoare 1′ 2′ 3′ 4′ 5′, vom obţine componentele pe noduri ale sarcinilor ce calcă în panou, care ne ajută la trasarea diagramei forţelor tăietoare. In fiecare panou forţa tăietoare este constantă şi este egală cu forţa tăietoare în dreptul nodului din care se scade componenta în nod a sarcinilor ce calcă în panou.

b) Sarcină uniform distribuită. Urmând acelaş raţionament vom duce parabola care ne dă momentele încovoietoare când sarcina lucrează direct, determinăm valoarea momentelor încovoietoare în dreptul nodurilor şi pe urmă ducem liniile drepte, care ne dau variaţia liniară în interiorul panourilor (fig. 84)

Forţa tăietoare este constantă în fiecare panou şi se deduce din diagrama liniară, cunoscută de la sarcina directă, după ce scădem în fiecare panou $\frac{p\lambda}{2}$, componenta sarcinei din panou pe nodul din stânga.

Din cercetarea diagramelor momentelor încovoietoare şi forţelor tăietoare pentru sarcinile indirecte găsim următoarele reguli:

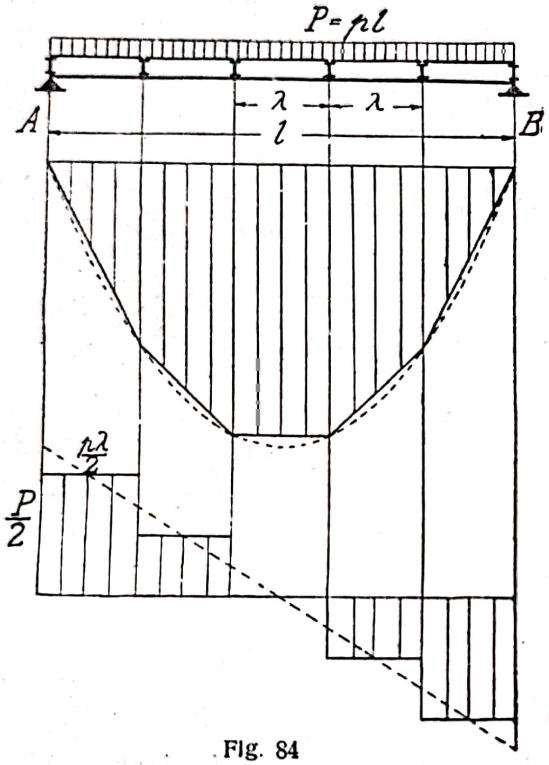


Fig. 84

Momentul încovoietor variază liniar în interiorul panoului, deci maximul nu se poate găsi decât în dreptul unui nod. Valoarea momentelor încovoietoare în noduri este aceiaşi ca şi pentru sarcina ce lucrează direct pe grindă.

Forţele tăietoare sunt constante în interiorul panoului şi valoarea lor se obţine din diagrama sarcinilor directe, scăzând componenta sarcinilor ce lucrează în panou pe nodul din stânga.

Se vede că în cazul sarcinilor indirecte prin aranjarea panourilor, putem avea o micşorare a momentelor încovoietoare şi a forţelor tăietoare, faţă de valorile ce le obţinem pentru sarcini directe.

61. Grinda articulată. Putem avea o grindă pe mai multe reazeme şi reacţiunile pe celelalte reazeme, care sunt mai multe decât cele două static determinate, sunt necunoscute. Pentru a le determina ne trebuesc tot atâtea relaţiuni. Dacă vom introduce însă $n-2$ articulaţii, în care deci din cauza libertăţii de mişcare momentul încovoietor este nul, avem numărul de condiţii, necesar pentru a afla reacţiunile şi grinda devine static determinată.

Introducând aceste articulaţii găsim grinda cu două rea-

zeme, cunoscută, şi grinda prelungită peste cele două reazeme. Aceste prelungiri peste reazeme se numesc *console* şi grinda ia numele de grindă cu console. Intr'o asemenea grindă putem afla momentele încovoietoare şi forţele tăietoare.

Am desenat (fig. 85) curba definitivă a momentelor încovoietoare cu ajutorul poligonului funicular după ce în prealabil am aflat reacţiunile *A*, *B*. Se vede că cele două console iau momente încovoietoare negative, asemănător cu grinda întepenită, iar în interiorul deschiderii apar momentele pozitive.

Forţele tăietoare se pot găsi în acelaş mod odată ce avem

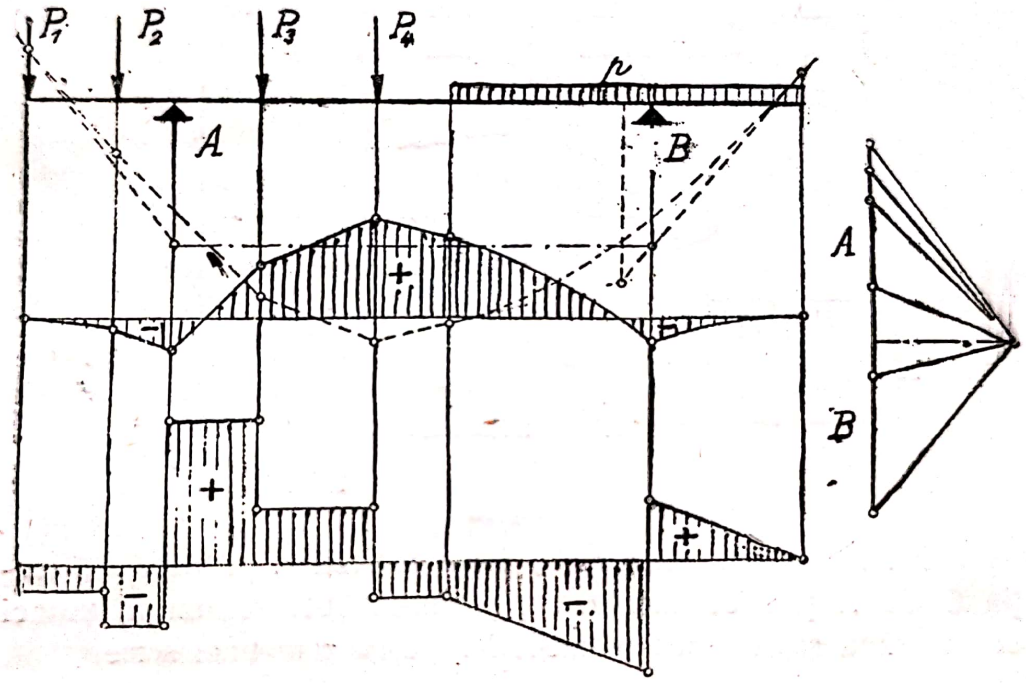


Fig. 85

elementele în poligonul forţelor. Este de notat schimbarea de semn a forţelor tăietoare, când momentul încovoietor trece prin maximum. Avem două momente maxime negative pe reazeme şi un moment maxim pozitiv în dreptul unei forţe.

Putem considera grinda pe două reazeme supusă la sarcinile cu care este încărcată pe deschiderea ei şi la două *momente pe reazeme* datorite consolelor M_A, M_B, ca un element nou (fig. 86), la care putem uşor determina momentele încovoietoare şi forţele tăietoare.

Să numim M_o momentul încovoietor produs în secţia *C* la distanţa *x*, de forţele ce lucrează pe grinda liber rezemată,

şi pe care îl avem reprezentat prin segmentul *ac*. Din cauza momentelor pe reazem, care sunt negative, se scade segmentul *ab*, pe care îl putem exprima. Deci momentul rezultant, care este reprezentat prin segmentul *bc*, este

$$M = M_0 + \frac{M_A x'}{l} + \frac{M_B x}{l}$$

în care am cuprins semnele în momentele pe reazeme.

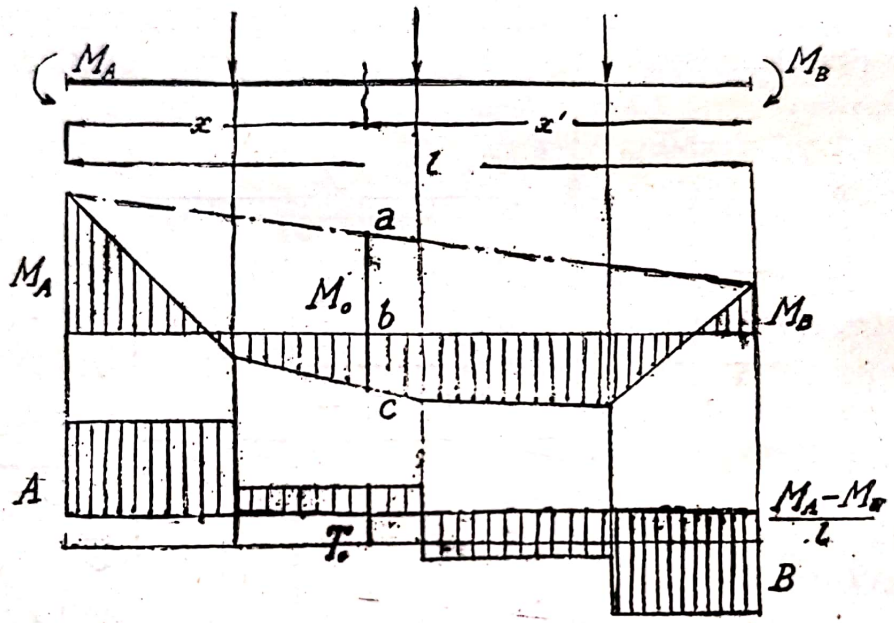


Fig. 86

Tot aşa, dacă numim T_0 forţa tăietoare, produsă în secţia C de forţele ce lucrează pe grinda liber rezemată, atunci considerând şi acţiunea momentelor pe reazem vom scrie

$$T = T_0 + \frac{M_B - M_A}{l}$$

Suntem deci în măsură să exprimăm momentul încovoietor şi forţa tăietoare în orice deschidere cunoscând momentele încovoietoare şi forţele tăietoare datorite sarcinilor ce lucrează în aceste deschideri şi ştiind momentele pe reazeme.

Putem afla cu usurinţă momentele pe reazem în mod grafic (fig. 87). Pentru aceasta vom lua forţele P_1, P_2, de pe prima deschidere şi cu un pol O construim poligonul funicular cu laturile 0, 1, 2. Articulaţia ne cere însă ca momentul în acel punct să fie nul, deci linia de închidere *s* ne este determinată, aşa fel ca să corespundă în dreptul articulaţiei. Pe verticala

reazemului B avem atunci momentul pe reazem şi semnele sunt determinate. Ducând în poligonul forţelor paralela la linia de închidere s, vom obţine reacţiunea A.

Pentru a doua deschidere forţele sunt P_3, P_4, P_5 şi construim al doilea poligon funicular cu polul O', păstrând aceiaşi distanţă polară, pentru a avea toate momentele încovoietoare la aceiaşi scară. Cum momentul pe reazemul B este cunoscut, vom duce latura 3 din punctul deja determinat, şi vom continua cu laturile 3, 4, 5, 6. Putem continua în acelaş mod poligonul funicular pentru deschiderea următoare pe forţele P_6, P_7, P_8, ... şi aşa mai departe.

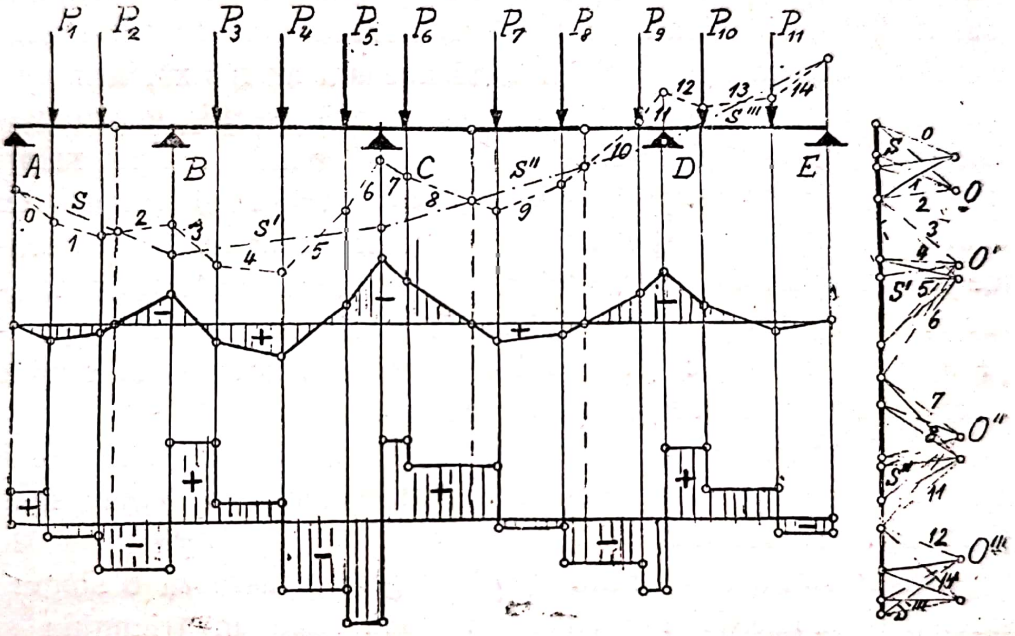


Fig. 87

In deschiderea $C\,D$ avem cele două articulaţii, unde momentele fiind nule avem determinată linia de închidere s'' şi prin aceasta momentele pe reazemele C şi D. Cunoscând momentul pe reazemul C vom duce linia s', iar momentul pe reazemul D ne dă linia s'''.

In poligonul forţelor O' ducând paralela cu linia de închidere s' găsim reacţiunile corespunzătoare pe reazeme. Cele două reacţiuni, din cele două deschideri vecine, din cele două poligoane vecine O şi O', ne dau reacţiunea din B.

In mod asemănător vom afla reacţiunile din celelalte reazeme.

Dacă vrem să avem în figură linia de închidere orizontală vom duce, ca în figura din dreapta, liniile de închidere s ori-

zontale şi cu noul pol vom desena din nou poligonul funicular, care este chiar diagrama momentelor încovoietoare.

Diagrama forţelor tăietoare este desenată cu ajutorul reacţiunilor determinate şi nu mai are nevoe de nici o lămurire.

Observăm că articulaţiile nu pot fi puse mai mult de două pe o deschidere, pentru că altfel am avea mobilitate. La n reazeme sunt $n-1$ deschideri şi $n-2$ articulaţii, deci dacă punem două articulaţii pe o deschidere vor rămâne alte deschideri fără nici o articulaţie.

62. **Sarcini mobile.** Când sarcinile se mişcă pe grindă, putând ocupa diferite poziţii, avem o problemă mai încurcată, trebuind să răspundem la trei întrebări. In adevăr, am văzut că pentru o poziţie oarecare a sarcinei, când aceasta ar fi fixă, urmărim variaţ a momentului încovoietor în diferite secţii, găsind valorile maxime. Când sarcina se mişcă pe grindă aceste valori vor varia dintr'o secţie în alta şi chiar în aceiaşi secţie, din cauza schimbării poziţiei sarcinei. Ne interesează valorile maxime ale reacţiunilor, momentelor încovoietoare şi forţelor tăietoare, dar în acelaş timp trebue să găsim pentru care poziţie a sarcinei au loc aceste valori maxime şi care sunt secţiile în care vom găsi aceste valori maxime.

Problemele curente sunt pentru grinda rezemată pe două reazeme, cu sarcină concentrată directă şi indirectă. Vom aminti şi cazul sarcinilor distribuite.

a) O singură sarcină. Când pe grindă lucrează o singură sarcină P, momentul încovoietor variază după un triunghiu şi maximul are loc totdeauna în dreptul sarcinei. Printre toate momentele încovoietoare maxime (fig. 88).

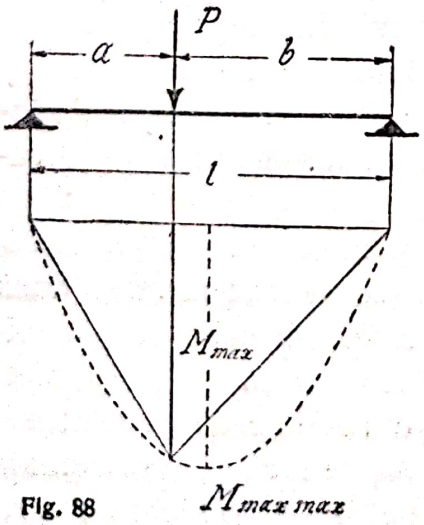


Fig. 88

$$M_{max} = \frac{Pab}{l}$$

cel mai mare, pe care îl numim *maximum maximorum*, are loc pentru $a = b = l/2$, adică atunci când sarcina este la mijloc Deci momentul încovoietor cel mai mare printre toate momentele maxime are loc în secţia din mijloc, când sarcina calcă în acea secţie şi valoarea lui este

$$M_{max\ max} = \frac{Pl}{4}$$

Toate momentele încovoietoare maxime se găsesc pe o parabolă şi valoarea cea mai mare este la mijloc.

Forţa tăietoare este, după cum ştim, egală cu reacţiunea A. Valoarea maximă a forţei tăietoare se obţine pentru poziţia care ne dă reacţiunea maximă, adică atunci când sarcina calcă cât mai aproape de reazemul A.

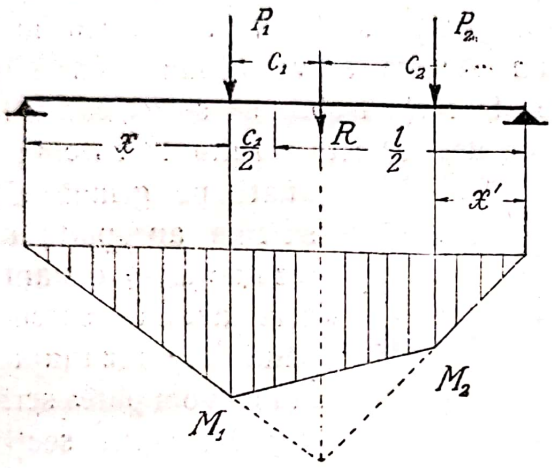


Fig. 89

b) Două sarcini. Când pe grindă lucrează două sarcini P_1 şi P_2, vom numi R rezultanta lor la distanţele c_1, c_2 de cele două componente. Momentul încovoietor variază după un trapez (fig. 89) şi este maxim în dreptul uneia din cele două forţe. Pentru a afla momentul cel mai mare când cele două forţe se plimbă pe grindă, vom nota x distanţa secţiei la reazemul din stânga, secţie în care trebue să calce forţa P_1 pentru a avea momentul încovoietor maxim. Vom avea.

$$M_1 = Ax = \frac{R(l - c_1 - x)}{l} x$$

$$\frac{dM_1}{dx} = \frac{R}{c}(l - c_1 - 2x) = 0$$

$$x = \frac{l - c_1}{2}$$

poziţie pentru care avem momentul maximum maximorum, iar valoarea lui este

$$M_{max\ max} = \frac{R}{l}\left(\frac{l - c_1}{2}\right)^2$$

Se vede că valoarea cea mai mare a momentului încovoietor va fi pentru c cel mai mic. Adică momentul încovoietor

maximum are loc în dreptul forţei celei mai mari, în poziţia dată de valoarea lui x.

Cum $l/2$ este mijlocul grinzii se spune că poziţia sarcinilor este aşa fel pe grindă, ca mijlocul grinzii să se găsească la mijlocul distanţei între rezultantă şi forţa cea mai mare.

Variaţia momentului încovoietor M_1 sau M_2 în diferite secţii în care calcă forţa P_1 sau P_2 este după o parabolă.

c) *Mai multe sarcini.* Când asupra grinzii lucrează un convoi cu mai multe sarcini P_1, P_2, ... P_n, putem să găsim o soluţie asemănătoare, pentru a afla poziţia secţiei în care avem momentul încovoietor maximum. Acesta se va produce când o forţă calcă în secţie şi această forţă trebue să se găsească în vecinătatea rezultantei. Dacă deci R este rezultanta sarcinilor aflate pe grindă, P_i, sarcina apropiată de rezultantă, c_i, distanţa dela această sarcină până la rezultantă, atunci vom putea scrie (fig. 90) pentru secţia x în care calcă sarcina P_i,

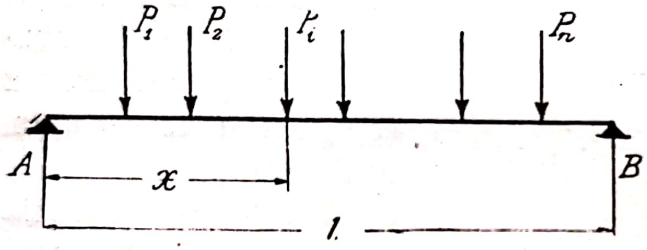


Fig. 90

$$M_x = x\frac{R}{l}(l - c_i - x) - M_i$$

în care M_i este suma momentelor forţelor aflate la stânga secţiei în raport cu P_i.

Condiţia de maxim este dată de anularea derivatei

$$\frac{R}{l}(l - c_i - 2x) = 0\ ,\quad x = \frac{l - c_i}{2}$$

Deci momentul maxim se găseşte în dreptul unei sarcini simetrică cu rezultanta faţă de mijlocul grinzii.

Pentru a afla rezultanta şi poziţia ei ne putem servi cu uşurinţă de un grafic.

Mai uşor se desvoltă problema când cunoaştem secţia, la distanţa x, şi dorim să aflăm poziţia convoiului, aşa fel ca în această secţie să obţinem momentul încovoietor maxim. Pentru aceasta trebue ca o sarcină să calce în secţie şi fie P_i sarcina care calcă în secţia la distanţa x.

Vom scrie deci, după notaţia întrebuinţată,

$$A = \sum_1^n \frac{Pb}{l}$$

$$M_x = Ax - \sum_1^i P(x-a)$$

$$= x \sum_1^n \frac{Pb}{l} - \sum_1^i P(x-a)$$

Dacă acesta este momentul încovoietor maxim, urmează ca mişcând convoiul puţin spre stânga valoarea lui să scadă. Dând deci o deplasare $db = -da$ spre stânga, vom avea o creştere negativă

$$dM_x = x \sum_1^n \frac{P\,db}{l} - \sum_1^i P\,da < 0$$

deci

$$\frac{x}{l} \sum_1^n P < \sum_1^i P$$

pe când pentru o deplasare la dreapta vom avea o creştere pozitivă, deci

$$\frac{x}{l} \sum_1^n P > \sum_1^{i-1} P$$

fiindcă sarcina P_i a eşit din stânga şi a trecut în dreapta secţiei.

Vom putea cu aceste inegalităţi să verificăm, care sarcină, călcând în secţie, produce schimbarea de semn, care ne dă momentul încovoietor maxim.

In caz când prin deplasarea convoiului ies sau intră sarcini noi pe grindă, sumele trebuesc să fie schimbate.

Relaţia găsită se poate intrepreta şi grafic (fig. 91). Sumele forţelor se pot găsi în poligonul forţelor, iar relaţia de mai sus o construim prin a patra proporţională. Se poate urmări pe figură cum momentul încovoietor maxim se va găsi în dreptul sarcinei P_2 sau P_3. Pentru prima poziţie, când sarcina P_2 calcă în secţia x, avem pe grindă patru sarcini, iar construcţia ne dă maximul pentru sarcina P_2. Mişcând convoiul mai departe intră şi sarcina P_5 pe grindă, după cum se vede în poziţia a doua şi vom avea maximul când P_3 calcă în secţie.

Pentru calculul rezultantelor şi poziţiilor secţiilor, precum şi pentru momentele încovoietoare maxime, în cazul convoaielor

cunoscute, de exemplu la calea ferată pentru trenuri, se întrebuinţează tabele, care ne dau valorile căutate pentru diferite deschideri.

d) *Soluţie grafică.* In multe cazuri când secţia în care

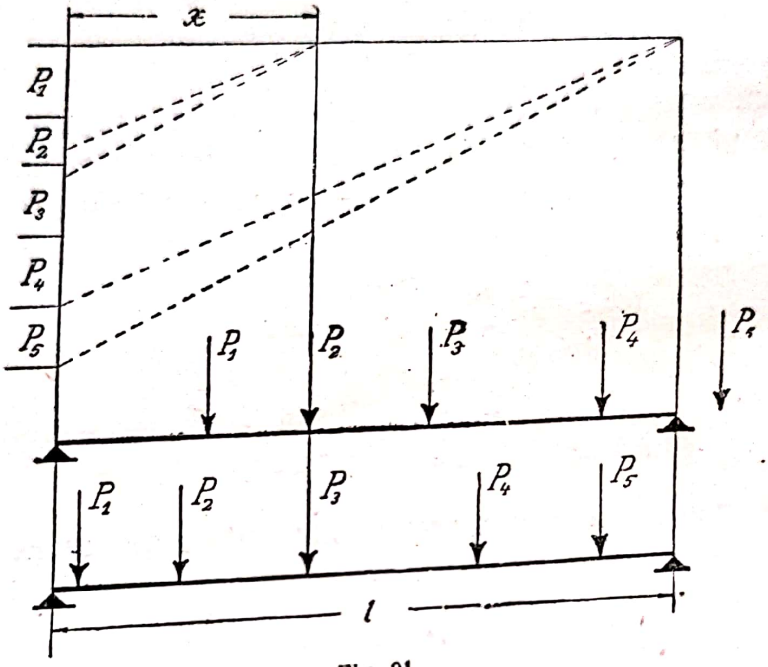


Fig. 91

căutăm momentele încovoietoare şi forţele tăietoare este cunoscută, este îndemânatică construcţia grafică pentru convoiurile de sarcini numeroase. Acest caz se prezintă pentru sarcini indirecte, când momentele încovoietoare sunt maxime în dreptul nodurilor, deci în puncte cunoscute şi când forţele tăietoare constante într'un panou se pot calcula din valorile reacţiunilor.

Avem două construcţii grafice pentru a afla forţa tăietoare şi momentul încovoietor, maxime într'o secţie oarecare, când un convoi se mişcă pe grindă.

Pentru a afla forţa tăietoare maximă într'o secţie, trebue ca între această secţie şi reazemul *A* să nu mai calce altă forţă şi convoiul să fie astfel aşezat ca să dea reacţiunea maximă.

Dacă sarcina P_1 intră pe grindă, forţa tăietoare este egală cu reacţiunea din *A* şi constantă până în secţia unde calcă sarcina. In figură (fig. 92) ea este dată de latura 1 a poligonului funicular care taie pe verticală segmentul P_1. Aceasta este valabilă până când intră sarcina P_2 pe grindă. Trebue atunci să adăugăm reacţiunea corespunzătoare sarcinei P_2, dată de

acelaş triunghiu care taie pe verticală segmentul P_2, adică ducând paralela 2′ la **2**. Avem astfel forţa tăietoare maximă, constantă, şi valabilă în stânga sarcinei P_1 şi până la reazem.

Continuând această construcţie obţinem poligonul 1′, 2′,

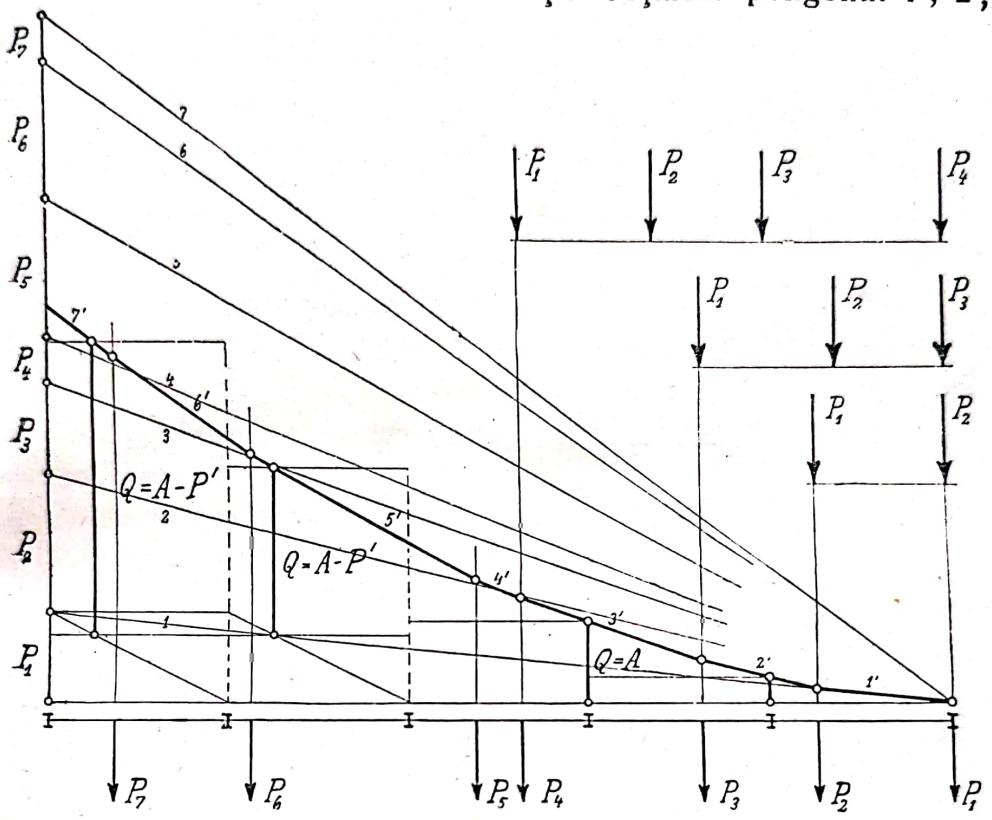


Fig. 92

3′, ..., care nu este altceva decât poligonul funicular al sarcinilor date, construit cu distanţa polară *l*.

In caz când sarcina este indirectă, forţa tăietoare dedusă cu ajutorul reacţiunii este constantă în panou. Dacă o sarcină calcă în panou, atunci se scade din reacţiunea *A* componenta sarcinei pe nodul din stânga. Această nouă reacţiune o aflăm tot prin acelaş procedeu cum se vede în figură.

Pentru a afla momentul încovoietor maxim într'o secţie ne servim de poligonul funicular. Trebue ca o sarcină să calce în secţie şi vom obţine momente încovoietoare mai mari dacă aceste sarcini sunt mai mari.

In loc de a mişca convoiul pe grindă se desenează convoiul şi poligonul funicular pe hârtie şi se mişcă grinda faţă de convoi, desenând-o pe o foaie de hârtie de calc. Pe această foaie de calc se va trage linia de închidere a poligonului funi-

cular care ne dă astfel valoarea momentului încovoietor într'un nod oarecare (fig. 93). Prin mai multe încercări putem astfel găsi momentul încovoietor maxim într'un nod.

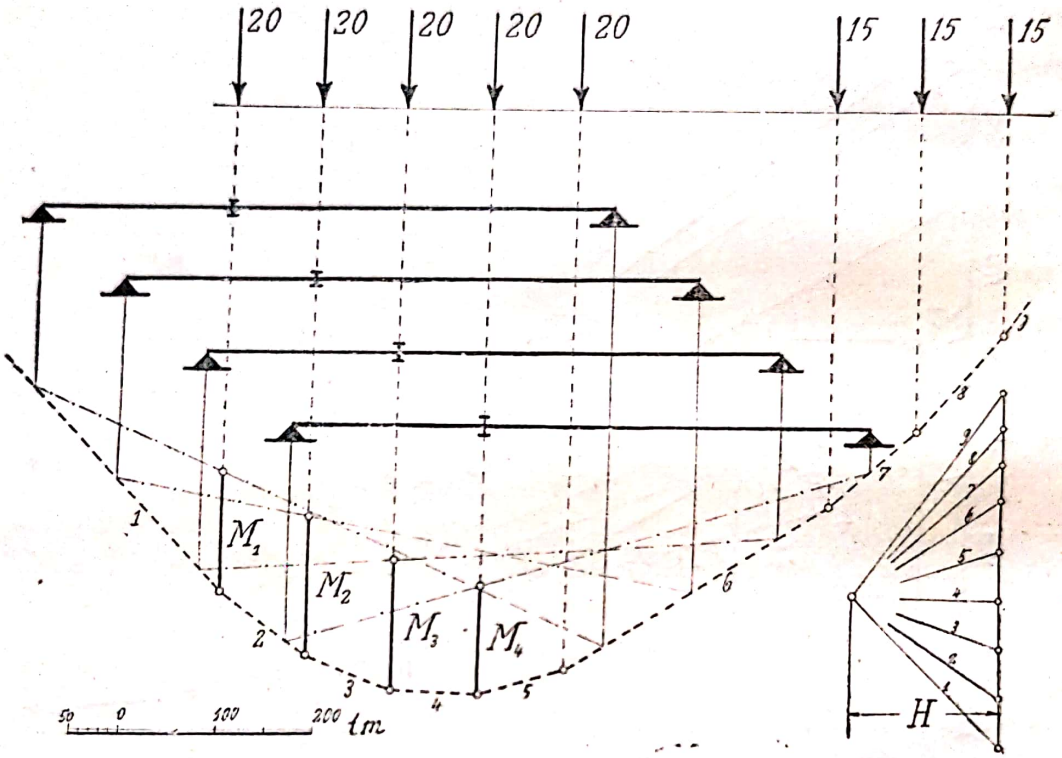


Fig. 93

§ 3. Linii de influenţă.

63 Definiţii. Am văzut că mărimile care ne interesează, reacţiuni, momente încovoietoare, forţe tăietoare, variază cu secţia care o avem în vedere, precum şi cu sarcinile ce sunt pe grindă. Am studiat variaţia lor luând diferite secţii, dar mai ales când sarcinile sunt mobile, problema devenea complicată.

Un mijloc simplu este de a lua numai o anumită secţie şi a urmări efectul pe care diferite sarcini îl dau în această secţie. Cu alte cuvinte ne interesează influenţa unei sarcini anumite asupra reacţiunii, momentului încovoietor, forţei tăietoare dintr'o anumită secţie.

Toate aceste mărimi fiind proporţionale cu sarcina, vom simplifica mult problema studiind influenţa unei singure

sarcini egală cu unitatea, şi care se mişcă dintr'un loc în altul, asupra mărimii ce ne interesează într'o secţie anumită, care acum rămâne fixă.

Fie η efectul pe care sarcina - unitate $P=1$, într'o poziţie oarecare, îl are asupra mărimii ce ne interesează în secţia ce am luat. Când sarcina este P atunci vom avea efectul

$$E = P\eta$$

proporţional cu sarcina. Se numeşte η coeficient de influenţă.

Când sarcina $P=1$ se mişcă, vom avea diferite valori pentru η. Desenând aceste valori, fiecare în poziţia cuvenită sarcinei care a produs'o, vom avea o curbă, *linia de influenţă* a mărimii considerate (fig. 94).

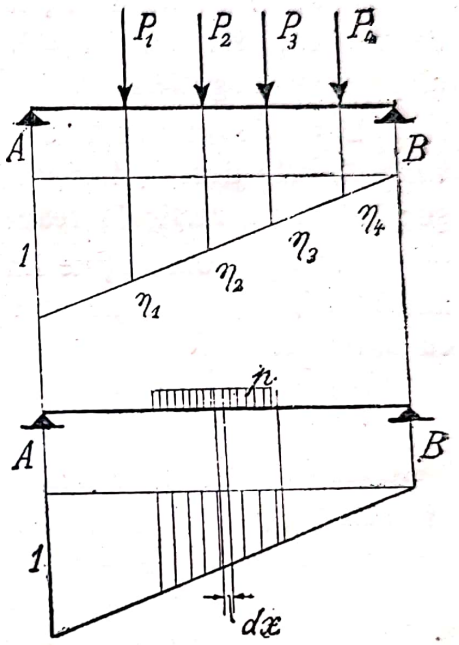


Fig. 94

Dacă avem mai multe sarcini P_1, P_2, ... în diferite poziţii, la fiecare corespund diferiţi coeficienţi de influenţă η_1, η_2, ... şi pentru secţia noastră vom putea scrie

$$E = P_1\eta_1 + P_2\eta_2 .... + P_n\eta_n$$

Dacă avem o sarcină uniform distribuită p, atunci într'un punct vom putea considera sarcina pdx, iar coeficientul de influenţă corespunzător acestei poziţii va fi η. Deci efectul sarcinei este

$$dE = p\eta\, dx$$

şi vom putea afla atunci, pentru o porţiune încărcată cu o sarcină uniform distribuită,

$$E = \int p\eta\, dx = -p\int \eta\, dx$$

integrala fiind suprafaţa liniei de influenţă.

64. **Aflarea liniilor de influenţă.** După cum se vede liniile de influenţă pot fi o unealtă importantă pentru calculul reacţiunilor, momentelor încovoietoare şi forţelor tăietoare. De aceia vom relua studiul sarcinilor mobile, cu ajutorul liniilor de

influență, și vom afla liniile de influență ale diferitelor mărimi pentru grinda rezemată pe două reazeme.

a) Linia de influență a reacțiunii. Să luăm grinda rezemată pe două reazeme și să urmărim influența unei sarcini $P=1$, asupra reacțiunii din reazemul A. Dacă distanța variabilă a sarcinei dela reazemul B este x, atunci

$$A = \frac{Px}{l} = \frac{x}{l} = \eta$$

Când P calcă în A, $x=l$, $A=1$ pentru ca pe urmă să descrească, devenind $A=0$, pentru $x=0$, când P calcă în B, și pe urmă negativă.

Linia de influență a reacțiunii din A, sau mai pe scurt *linia A*, este deci o dreaptă (fig. 95) pe care o putem trasa ușor, luând pe verticala reazemului A segmentul $\eta=1$.

Tot așa vom obține linia de influență a reacțiunii din B, adică *linia B*, luând pe verticala reazemului B un segment egal cu unitatea.

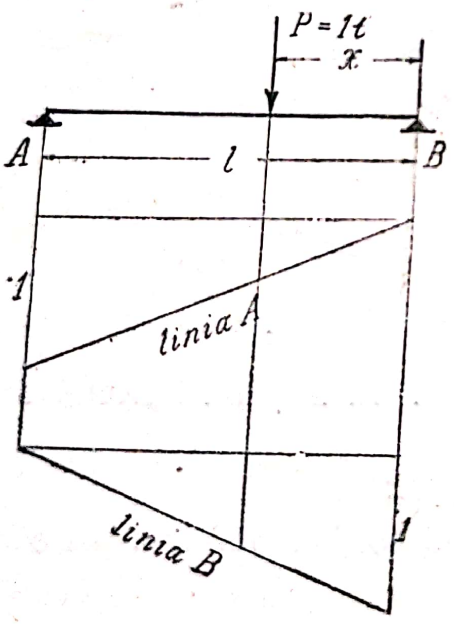


Fig. 95

Observăm că suma celor două reacțiuni $A+B$ este egală cu unitatea, ceiace se verifică pe figură.

Se pot face diferite aplicațiuni de calcul, aflând foarte iute și ușor reacțiunea, pentru diferite sarcini concentrate sau distribuite.

b) Linia de influență a momentului încovoietor. Cunoscând reacțiunea putem afla momentul încovoietor într'o secție a grinzii, situată la distanța a de reazem. Pentru o poziție oarecare a sarcinei $P=1$, dată de distanța x a acesteia la reazemul din stânga, avem o reacțiune A și deci momentul încovoietor în secția a este

$$M = Aa = \frac{Px}{l}a = \frac{xa}{l} = \eta$$

coeficientul de influenţă se obţine din acela aflat la reacţiunea A, înmulţind cu a.

Acest lucru este valabil numai cât timp sarcina P se află la dreaptă secţiei C. Când însă P calcă între A şi C, vom lua momentul reacţiunii B, deci înmulţim ordonatele liniei B cu distanţa b.

Avem astfel linia de influenţă a momentului încovoietor în secţia C, sau *linia M* (fig. 93)

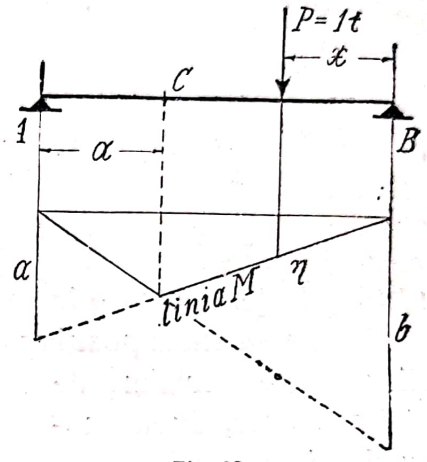


Fig. 93

Pentru cazul când secţia C se găseşte în consolă, linia M se poate desena uşor prin prelungirea dreptei.

Cu ajutorul liniei de influenţă putem afla valorile remarcabile ale momentului încovoietor în secţia C. Dacă grinda este supusă la greutatea sa proprie g, care lucrează pe toată grinda, vom avea momentul încovoietor aflând suprafaţa liniei M şi deci scăzând partea negativă din cea pozitivă. Dacă avem o sarcină uniform distribuită p, şi dorim a avea valoarea maximă a momentului încovoietor, nu trebue să încărcăm decât partea pozitivă a liniei de influienţă, iar pentru valoarea minimă va trebui să încărcăm numai partea negativă. Dacă deci Ω_+, Ω_- sunt suprafeţele respective ale liniei M vom avea

$$M_g = g\,(\Omega_+ - \Omega_-)$$

$$_{max}M = M_g + M_p = g(\Omega_+ - \Omega_-) + p\Omega_+$$

$$= (g+p)\,\Omega_+ - g\,\Omega_- = (g+p)(\Omega_+ - \Omega_-) + p\Omega_-$$

$$_{min}M = M_g - M_p = g(\Omega_+ - \Omega_-) - p\Omega_-$$

$$= g\Omega_+ - (g+p)\,\Omega_- = (g+p)(\Omega_+ - \Omega_-) - p\Omega_-$$

de unde vom deduce,

$$_{max}M + {}_{min}M = (2g+p)(\Omega_+ - \Omega_-)$$

relaţie ce ne poate servi la verificare.

Acelaş mijloc îl putem întrebuinţa şi pentru un convoi mobil de sarcini, şi vom obţine valoarea maximă încărcând numai partea pozitivă a liniei de influenţă.

c) Linia de influenţă a forţelor tăietoare. Tot cu ajutorul reacţiunii aflăm şi forţa tăietoare într'o secţie *C*, căci avem

$$T = A = \frac{Px}{l} = \frac{x}{l} = \eta$$

deci linia de influenţă a forţei tăietoare este chiar linia *A*.

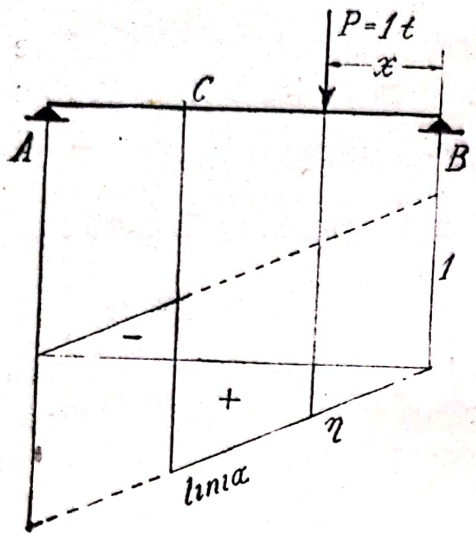


Fig. 97

Acest lucru este valabil numai atât timp cât sarcina *P* se află la dreapta secţiei *C*. Când însă *P* calcă între *A* şi *C*, vom lua reacţiunea din *B*, dar atunci sensul s'a schimbat.

Avem astfel linia de influenţă a forţei tăietoare în secţia *C*, adică *linia T* (fig. 97).

Putem să aflăm poziţia sarcinilor pentru care obţinem valorile maxime şi minime ale forţei tăietoare, după modelul dat, încărcând cu convoiul de sarcini numai partea pozitivă, sau numai cea negativă, a liniei de influenţă. şi aşezând forţele cele mari în dreptul ordonatelor maxime.

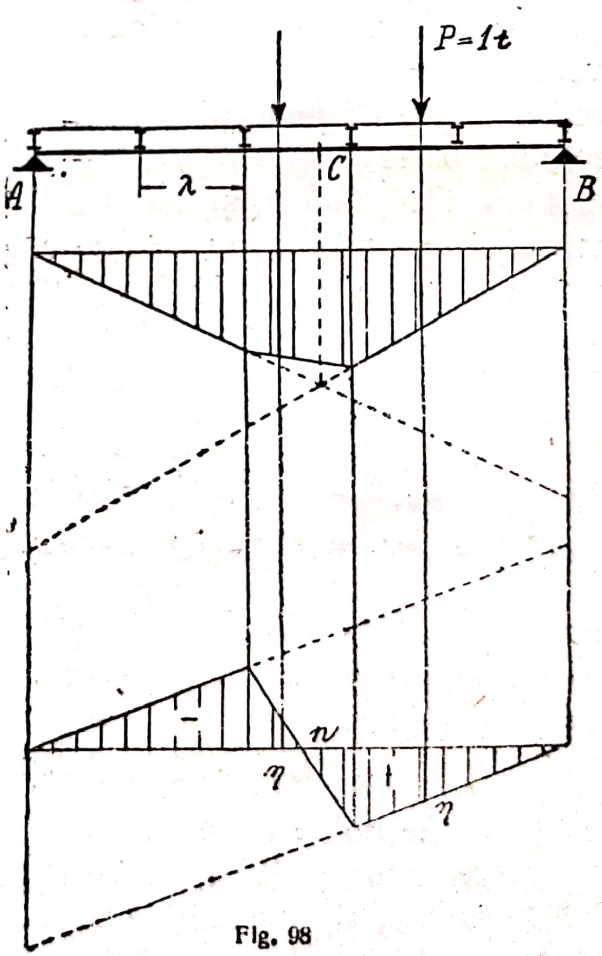


Fig. 98

65) **Linii de influenţă pentru sarcina indirectă.** Să luăm o secţie *C*, într'un panou oarecare (fig. 98). Dacă sarcina calcă în afara panoului considerat liniile de influenţă sunt cele cunoscute. Când sarcina calcă în panou, componentele ei pe cele două noduri schimbă valoarea momentului încovoietor şi a forţei tăietoare. Dar variaţia a-

ceasta este liniară şi de aci rezultă schimbarea liniei de influenţă.

Există un punct pentru care forţa tăietoare este nulă, punct care este dat în figură şi care este numit *punct neutru.* Pentru a avea forţa tăietoare maximă pozitivă, trebue să încărcăm grinda pe toată partea pozitivă a liniei de influenţă până în punctul neutru. Acelaş lucru pentru forţa tăietoare maximă negativă, pentru care încărcăm partea negativă a liniei de influenţă până în punctul neutru.

Ţinând seama de faptul că variaţia este liniară, putem desena foarte uşor linia de influenţă şi pentru cazuri mai complicate.

66. **Linii de influenţă la grinda articulată.** Vom putea afla diferitele linii de influenţă, servindu-ne de cunoştinţele de până acum şi de faptul că liniile de influenţă, după cum am văzut, sunt totdeauna linii drepte. Un exemplu se poate urmări pe figură (fig. 99).

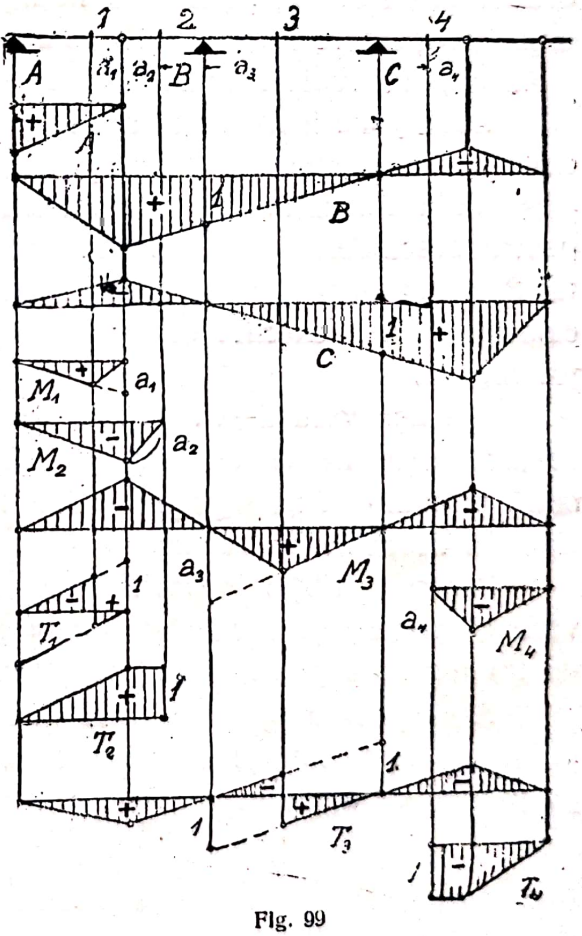


Fig. 99

Pentru a desena linia *A*, vom observa că pentru poziţia sarcinei în reazemul *A* ordonata este $\eta = 1$. Când sarcina se deplasează înspre articulaţie reacţiunea scade, pentru a deveni nulă când sarcina calcă în această articulaţie. Pentru poziţiile sarcinei la dreapta articulaţiei nu mai avem reacţiune în *A*, şi prin aceasta linia *A* este desenată.

Pentru a desena linia *B* vom observa că pentru poziţia sarcinei în reazemul *B* ordonata este $\eta = 1$, iar pentru poziţia sarcinei în reazemul *C* ordonata este nulă. Prin aceasta avem dată linia *B* între cele două articulaţii. Cunoscând că reacţiunea variază liniar vom putea completa ramurile liniei de influenţă.

Pentru a desena linia *C* se va observa că ordonata $\eta = 1$

o avem când sarcina calcă în reazemul C, deci avem linia până în dreptul articulaţiilor. Ramurile se completează liniar, după cum se vede în figură.

In acelaş mod se poate urmări trasarea liniilor de influenţă pentru momentul încovoietor şi forţa tăietoare în diferitele secţii indicate pe figură, pornind dela grinda pe două reazeme cunoscută.

Linia de influenţă a momentului încovoietor în secţia 1, este acea obişnuită pentru grinda rezemată pe două reazeme.

Linia de influenţă a momentului încovoietor în secţia 2, se află începând din acest punct. Când sarcina calcă în 2, momentul încovoietor este nul. Momentul este maxim când sarcina calcă în articulaţie, la distanţa a_2 şi vom duce deci această ordonată, ce se vede rabătută în figură. Mai departe când sarcina merge spre reazemul A, componenta în articulaţie şi deci momentul încovoietor variază liniar.

Acelaş lucru se poate spune şi referitor la momentul încovoietor în secţia 4.

Linia de influenţă a momentului încovoietor în secţia 3, pentru deschiderea BC este cunoscută, având maximul în punctul 3, şi liniile prelungite peste reazeme până în dreptul articulaţiilor. Când sarcina este pe deschiderile vecine, avem variaţia liniară.

Tot aşa vom desena liniile de influenţă ale forţei tăietoare pornind dela liniile de influenţă cunoscute pentru grinda rezemată şi completând segmentele liniare ce ne dau influenţa sarcinei în deschiderile vecine.

Pentru a obţine valorile maxime într'o secţie oarecare, se vede că trebue să încărcăm numai o parte din grindă, şi anume numai regiunea pozitivă sau negativă a liniei de influenţă.

Acelaş lucru se poate face şi în cazul când avem sarcină indirectă, complectând linia de influenţă prin segmentele liniare pe panoul ce avem în vedere.

Scanned with OKEN Scanner

Cap. VI. Momente statice şi momente de inerţie.

67. **Definiţii.** Să luăm o secţie limitată de un contur oarecare (fig. 100). In planul secţiei ne alegem două axe Ox, Oy, şi fixăm un element al secţiei $d\Omega$ prin coordonatele sale x, y.

Se numeşte *moment static* al secţiei faţă cu axa x, suma

$$S_x = \int y d\Omega$$

integrala fiind luată pe întreaga secţie.

Se numeşte *moment de inerţie* al secţiei faţă cu axa x, suma

$$I_x = \int y^2 d\Omega$$

Momentele de inerţie, faţă cu cele două axe I_x, I_y sunt *momente de inerţie axiale.*

Se numeşte *moment de inerţie centrifugal* al secţiei faţă cu axele x, y, suma

$$I_{xy} = \int xy d\Omega$$

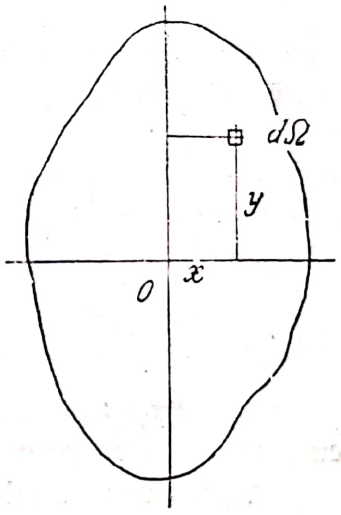


Fig. 100

Momentele de inerţie axiale fiind o sumă de patrate, sunt totdeauna pozitive, momentele de inerţie centrifugale, ca şi momentele statice, pot avea semne pozitive sau negative după sensul ce rezultă din alegerea axelor.

Momentele statice şi momentele de inerţie sunt mărimi dirijate având valori şi semne diferite şi variind după axele la care le raportăm.

Momentul static este momentul forţelor, cunoscut din me-

canică. Intrebuinţăm proprietăţile stabilite şi mai cu seamă vom scrie momentul rezultantei, care este egal cu suma momentelor componentelor. Rezultanta lucrează în centrul de greutate al suprafeţei şi deci momentul static faţă cu o axă ce trece prin centrul de greutate este nul.

Momentul este pozitiv când axa este în partea pozitivă sau invers, după poziţia ei faţă de centrul de greutate.

68. **Variaţia momentelor de inerţie faţă de axe paralele.** Să luăm o secţie şi o axă x, faţă de care cunoaştem momentul de inerţie I_x. Dacă ducem o altă axă x' paralelă cu cea dintâi şi la distanţa b, vom avea după definiţie momentul de inerţie $I_{x'}$, faţă cu noua axă x',

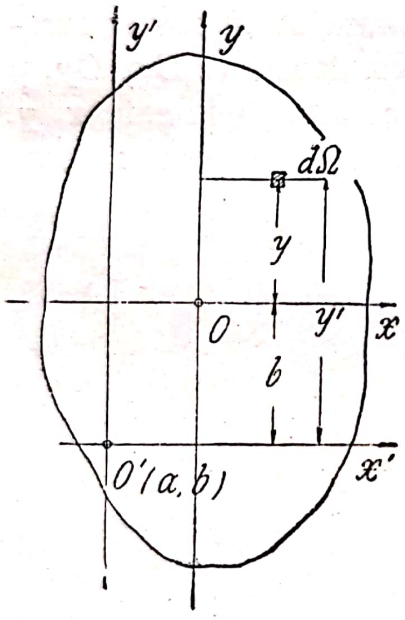


Fig. 101

$$I_{x'} = \int y'^2 d\Omega$$

cum însă schimbarea de axă se face prin relaţia

$$y' = y + b$$

vom avea desvoltând

$$I_{x'} = \int (y + b)^2 d\Omega = I_x + 2bS_x + b^2\Omega$$

Dacă axa x trece prin centrul de greutate O (fig. 101), momentul static este nul şi avem

$$I_{x'} = I_{x_0} + b^2\Omega$$

formulă ce se întrebuinţează des în calcule şi care ne arată că, momentul de inerţie cel mai mic este faţă cu axa ce trece prin centrul de greutate I_{x_0}.

Vom avea la fel pentru alte axe

$$I_{x'} = I_x + 2bS_x + b^2\Omega$$

$$I_{y'} = I_y + 2aS_y + a^2\Omega$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + aS_x + bS_y + ab\Omega$$

pe când pentru axele ce trec prin centrul de greutate al secţiei

$$I_{x'} = I_x + b^2\Omega$$

$$I_{y'} = I_y + a^2\Omega$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + ab\Omega$$

Scanned with OKEN Scanner

69. Variaţia momentelor de inerţie faţă de axe concurente. Să luăm secţia noastră şi axele Ox, Oy, trecând prin centrul de greutate O, faţă de care cunoaştem momentele de inerţie pe care le obţinem prin transformarea coordonatelor (fig. 102).

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

Ceiace după definiţie ne va da

$$I_{x'} = \int y'^2 d\Omega = I_y \sin^2\alpha + I_x \cos^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$
$$I_{y'} = \int y'^2 d\Omega = I_y \cos^2\alpha + I_x \sin^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha$$
$$I_{x'y'} = \int x'\, y'\, d\Omega = (I_x - I_y)\sin\alpha\cos\alpha + I_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Putem deci, cunoscând cele trei momente de inerţie faţă de cele două axe, să scrim orice moment de inerţie faţă cu orice axă.

Când α variază vom avea variaţia momentelor de inerţie şi putem să determinăm direcţia α_1, pentru care avem momentul de inerţie maxim.

Acest unghiu este dat prin derivarea momentului de inerţie axial.

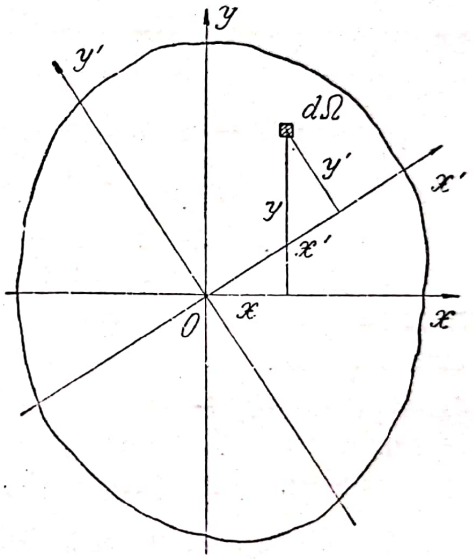


Fig. 102

$$\frac{dI_{x'}}{d\alpha} = 2I_y\sin\alpha\cos\alpha - 2I_x\sin\alpha\cos\alpha - 2I_{xy}\cos 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Observăm că derivata de mai sus este tocmai expresia momentului de inerţie centrifugal, deci momentul de inerţie axial este maxim atunci când momentul de inerţie centrifugal faţă de axe este nul.

Inlocuind valoarea unghiului $2\alpha_1$, în expresia momentului de inerţie obţinem

$$I_{I,\,II} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

Aceste două momente maxim şi minim se numesc *momente de inerţie principale* ale secţiei, iar axele date de valoarea α_1, şi cea următoare $\alpha_1 + \pi/2$ sunt *axele principale de inerţie.*

Dacă invers cunoaştem momentele de inerţie principale ale unei secţii I_I, I_{II}, şi fiindcă ştim că faţă de axele principale momentul de inerţie centrifugal este nul, vom putea scrie pentru nişte axe oarecare x,y ce fac unghiul α cu axele principale

$$I_x = I_I \cos^2 \alpha + I_{II} \sin^2 \alpha$$
$$I_y = I_I \sin^2 \alpha + I_{II} \cos^2 \alpha$$
$$I_{xy} = \tfrac{1}{2}(I_I - I_{II}) \sin 2\alpha$$

Aceste relaţii ne servesc să scrim orice moment de inerţie faţă cu orice axă, cunoscând cele două momente principale ale secţiei.

Adunând primele două relaţii găsim

$$I_x' + I_y' = I_x + I_y = I_I + I_{II} = \int (x^2 + y^2)\, d\Omega = I_p$$

adică suma momentelor de inerţie, faţă de două axe rectangulare, este constantă şi egală cu momentul de inerţie polar.

In general o axă de simetrie este şi axă principală, căci momentul centrifugal devine nul din cauza simetriei, fiecare element $d\Omega$ are termen în partea pozitivă şi în cea negativă, aşa că termenul $xyd\Omega$ este nul. Dacă o secţie are mai multe axe de simetrie decât două, atunci toate momentele de inerţie faţă de aceste axe sunt principale, şi deci sunt egale între ele.

70. **Calculul momentelor de inerţie.** Rezemându-ne pe teoremele de mai sus, vom căuta să aflăm momentele de inerţie ale figurilor întrebuinţate mai des faţă de axele ce trec prin centrul lor de greutate şi în special faţă de axele principale.

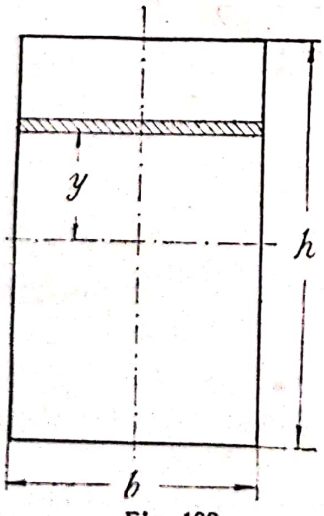


Fig. 103

a) Dreptunghiu. Centrul de greutate şi axele principale fiind cunoscute (fig. 103) vom alege un element de suprafaţă

$$d\Omega = b\,dy$$

$$I_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b\, dy = \frac{bh^3}{12}$$

în acelaş mod putem scrie

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

Dacă vrem să aflăm momentul de inerţie faţă de bază avem

$$I_b = I_1 + d^2\,\Omega = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4}\,b\,h = \frac{bh^3}{3}$$

Făcând $b = h = a$ avem patratul

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

b) Platbande. Este o secţie ce se întâlneşte deseori (fig. 104). Avem

$$I_x = \frac{b}{12}(h^3 - h_1^3)$$

de multe ori se dă grosimea platbandelor în care caz

$$h_1 = h - 2\,\delta$$

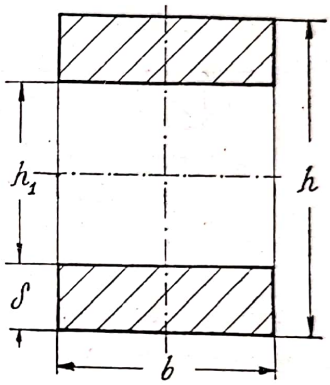


Fig. 104

c) Dreptunghiu gol. Dacă golul este aşezat simetric faţă de axele principale (fig. 105), se scade din momentul de inerţie al dreptunghiului exterior momentul de inerţie al golului. Avem

$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} - \frac{h_1 b_1^3}{12}$$

d) Secţia dublu T. Secţia compusă din două platbande legate între ele printr'o inimă verticală se numeşte secţie dublu T. Dacă secţia este simetrică (fig. 106) avem tocmai cazul *c*, de mai sus şi, cu aceleaşi notaţii se repetă formulele.

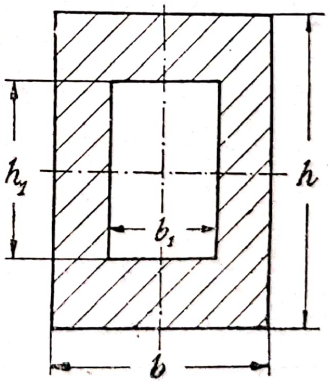


Fig. 105

Când secţia nu este simetrică (fig. 107) trebue să aflăm mai întâi centrul de greutate, prin distanţele lui a_1, a_2.

$$a_2 = \frac{\frac{bd^2}{2} + \delta h_1\left(\frac{h'}{2} + d\right) + b'\,d'\left(h - \frac{d'}{2}\right)}{b'd' + \delta h_1 + b\,d}$$

Cunoscând acum poziţia axei ce trece prin centrul de greutate, vom putea scri momentul de inerţie al secţiei, faţă de această axă, scriind suma momentelor de inerţie pentru cele trei dreptunghiuri, după teorema dela No. 68.

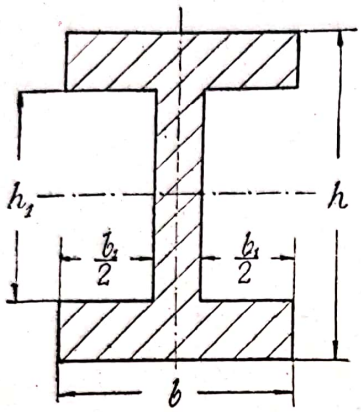


Fig. 106

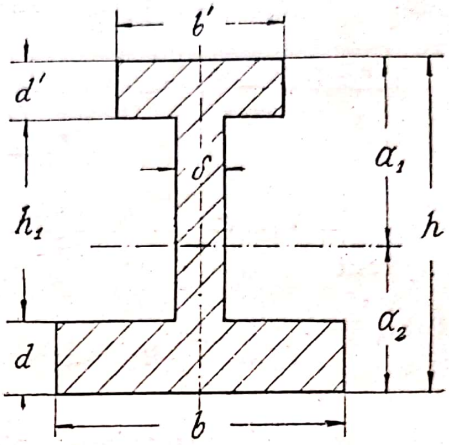


Fig. 107

$$I_x = \frac{b'd'^3}{12} + \left(a_1 - \frac{a'}{2}\right)^2 b'\,d' + \frac{\delta\, h_1^3}{12} + \left(a_1 - d' - \frac{h_1}{2}\right)^2 \delta h_1 +$$

$$+ \frac{bd^3}{12} + \left(a_2 - \frac{d}{2}\right)^2 bd$$

e) Cerc. Orice diametru este axă de simetrie, deci axă principală şi vom avea $I_x = I_y$

$$I_x + I_y = 2\,I_x = I_p = \frac{\pi a^4}{2}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{64}$$

f) Sfert de cerc. Din cauza simetriei momentul de inerţie faţă cu baza, luată drept axă x, este a patra parte din momentul de inerţie al cercului

$$I_x = I_y = \frac{\pi a^4}{16}$$

Momentul de inerţie centrifugal este

$$I_{xy} = \int xy\,d\Omega = \int_0^a y\,dx\,\frac{y}{2}\,x = \int_0^a \frac{1}{2}x\,(a^2 - x^2)\,dx = \frac{a^4}{8}$$

Se pot scoate de aci momentele de inerţie faţă de axele ce trec prin centrul de greutate, care este cunoscut (fig. 108)

$$I_{x_0} = I_x - d^2\Omega = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{\pi a^2}{4}\left(\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}\right)^2 = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{4}{9}\frac{a^4}{\pi}$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{xy} - ab\,\Omega = \frac{a^4}{8} - \frac{4a^4}{9\pi}$$

Cele două momente I_{x_0}, I_y, fiind egale, rezultă că axa principală este la 45°. Momentele principale vor fi deci

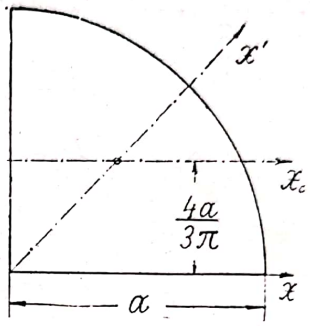


Fig. 108

$$I_{I,II} = I_{x_0} \pm I_{x_0 y_0}$$

adică

$$I_I = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{a^4}{8}$$

$$I_{II} = \frac{\pi a^4}{16} + \frac{a^4}{8} - \frac{8a^4}{9\pi}$$

g) Secţiile fiarelor laminate. Pentru grinzile de fier laminate secţiile curente sunt trecute în cataloagele fabricilor şi în manualele inginereşti. Se întrebuinţează de obicei profilele normale. Momentele de inerţie sunt calculate şi date în aceste manuale împreună cu centrele de greutate şi alte dimensii necesare pentru calcul.

Ca un exemplu să calculăm momentele de inerţie ale unei corniere, ⌊ 100.100.10, ale cărei date sunt în figură (fig. 109). Colţurile sunt rotunjite

$$\Omega = 10 \times 1 + 9 \times 1 + 0{,}215 \times 1{,}2^2 - 0{,}215 \times 2 \times 0{,}6^2 = 19{,}15 \text{ cm}^2$$

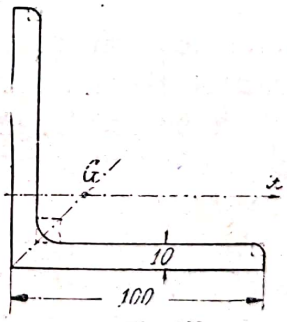


Fig. 109

Pentru a afla momentul static şi momentul de inerţie trebue să facem corecturile pentru colţurile rotunjite în sfert de cerc. Este mai uşor dacă calculăm momentele secţiei formată din diferenţa între patrat şi cerc.

Avem astfel (fig. 110).

$$S_b = a^2\left(b + \frac{a}{2}\right) - \frac{\pi a^2}{4}\left(b + \frac{4a}{3\pi}\right) = a^2\left(0{,}215\,b + 0{,}167\,a\right)$$

$$I_b = \frac{a^4}{12} + a^2\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\pi a^4}{16} + \frac{4a^4}{9\pi} - \left(b + \frac{4a}{3\pi}\right)^2\frac{\pi a^2}{4}$$

$$= a^2\left(0{,}137\,a^2 + 0{,}333\,ab + 0{,}215\,b^2\right)$$

Aşa că vom avea pentru toată corniera, scriind pentru fiecare figură în parte,

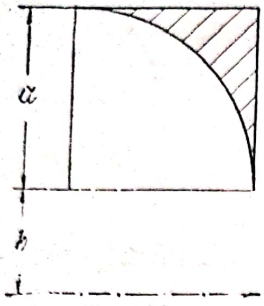


Fig. 110

$$S_b = 10 \times 1 \times 5 + 9 \times 1 \times 0{,}5 - 0{,}6^2 (0{,}215 \times 9{,}4 + 0{,}167 \times 0{,}6) - 0{,}6^2 (0{,}215 \times 9{,}4 + 0{,}167 \times 0{,}6) + 1{,}2^2 (2{,}2 \times 0{,}215 - 0{,}167 \times 1{,}2) = 54{,}06 \text{ cm}^3$$

ceiace ne dă pentru distanţa centrului de greutate

$$e = \frac{S_b}{\Omega} = \frac{54{,}06}{19{,}15} = 2{,}82 \text{ cm}$$

Momentul de inerţie faţă cu axa ce trece prin centrul de greutate va fi

$$I_x = \frac{1}{12} \times 1 \times 10^3 + 1 \times 10 (5 - 2{,}82)^2 + \frac{1}{12} \times 9 \times 1^3 + 9 \times 1 (2{,}82 - 0{,}5)^2 + 1{,}2^2 (0{,}137 \times 1{,}2^2 + 0{,}333 \times 1{,}2 \times 2{,}2 + 0{,}215 \times 2{,}2^2) - 0{,}6^2 (0{,}137 \times 0{,}6^2 + 0{,}333 \times 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}215 \times 0{,}4^2) - 0{,}6^2 (0{,}137 \times 0{,}6^2 + 0{,}333 \times 0{,}6 \times 9{,}4 + 0{,}215 \times 9{,}4^2) = 173 \text{ cm}^4.$$

Axa principală este la 45°. Putem scrie momentul de inerţie faţă cu această axă, care este I_{max}.

$$I_{max} = \frac{10^4}{12} - \frac{9^4}{12} + 0{,}012 \times 1{,}2^4 - 2 (0{,}012 \times 0{,}6^4 + 0{,}215 \times 0{,}6 \times \left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 = 274 \text{ cm}^4$$

71. **Calculul grafic al momentelor de inerţie.** Se află momentul cu ajutorul poligonului funicular, împărţind suprafaţa în fâşii paralele cu axa faţă de care vrem să aflăm momentul. Dacă calculăm aceste suprafeţe Ω_1, Ω_2 .. Ω_n, asemănându-le cu dreptunghiuri şi trapeze, şi luându-le ca forţe construim poligonul forţelor, iar poligonul funicular al acestor forţe ne dă momentele.

Liniile de acţiune ale forţelor Ω_1, Ω_2, ... Ω_n sunt date de centrele de greutate ale elementelor. Ducând laturile poligonului funicular paralele cu laturile corespunzătoare din poligonul forţelor, vom avea după cum ştim momentul, citind pe axă segmentul cuprins între două laturi corespunzătoare ale funicularului (fig. 111). Dacă m este scara la care am reprezentat forţele, adică 1 cm pe desen reprezintă m cm² de suprafaţă, atunci în poligonul forţelor vom citi

$$\Omega = \Sigma m a_1 = m a$$

Dacă H este distanţa polară atunci momentele forţelor sunt segmentele s_1, s_2 ... notate pe figură, aşa că

$$H s_1 = a_1 y_1, \qquad H s_2 = a_2 y_2, \qquad \ldots.$$

şi adunând toate segmentele obţinem $s = \Sigma s_1$

$$H s = \Sigma H s_i = \Sigma a_i y_i$$

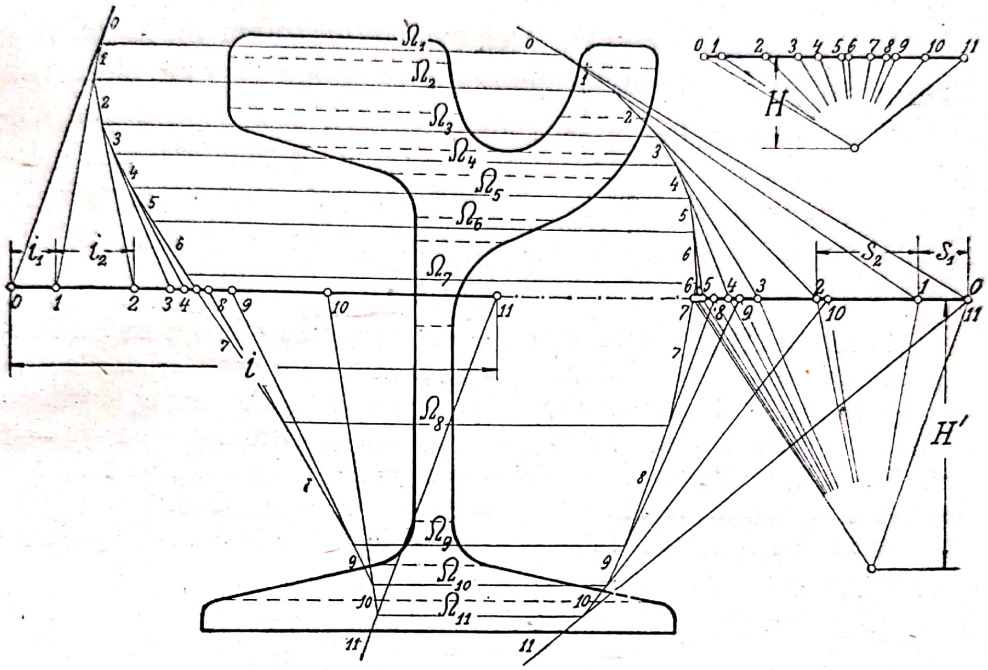


Fig. 111

$s$fiind momentul static al suprafeţei faţă de axa, va trebui să scrim

$$S = \Sigma \Omega_i y_i = \Sigma m a_i y_i = m H s$$

Pe figură axa este astfel aleasă ca să treacă prin punctul de întâlnire al laturilor extreme ale poligonului funicular, deci este axa ce trece prin centrul de greutate şi $s = 0$.

Repetând acest procedeu, adică luând acum pe liniile forţelor ce lucrează momentele statice s_1, s_2 ... şi ducând al doilea poligon funicular vom avea momentele de inerţie. Poligonul forţelor s_1, s_2, ... este deja construit pe axă, alegem o nouă distanţă polară H', ducem noul poligon funicular şi obţinem pe axă segmentele i_1, i_2, ... Avem iarăşi

$$H' i_1 = s_1 y_1, \qquad H' i_2 = s_2 y_2, \qquad \ldots.$$

şi adunând toate segmentele, găsim suma lor adică segmentul i din figură.

$$H' i = \Sigma s_i y_i$$

Ţinând seama de relaţiile scrise avem

$$m H H' i = \Sigma m H s_i y_i = \Sigma \Omega_i y_i^2 = I$$

deci cu ajutorul segmentului i am calculat momentul de inerţie faţă de axa dată.

La facerea calculului trebue să observăm unităţile. Momentul static s al suprafeţei este exprimat în cm³, deci vom citi pe m, H, s, pe scara lungimilor în cm, sau s pe scara lungimilor şi H pe scara suprafeţelor, obţinând deodată mH. Momentul de inerţie I este exprimat în cm⁴, deci vom citi pe m, H, H' pe scara lungimilor în cm, sau direct mH sau mH' pe scara forţelor.

In figura 111 este reprezentat profilul şinei de tramvai sistem Phönix, de 130 mm înălţime şi 33,6 kg. greutate pe metru liniar, laminat de uzinele Reşiţa şi întrebuinţat pe liniile tramvaelor comunale Timişoara. S'a ales ca scară pentru lungimi 1 cm = 2 cm, iar pentru forţe 1 cm = 15 cm². Prima distanţă polară este $H = 1$ cm = 15 cm², rezultă deci că segmentele s se vor citi la scara 1 cm = $mHs = 15 \times 2 = 30$ cm³.

A doua distanţă polară este $H' = 3$ cm = 90 cm³, şi deci segmentele i se vor citi la scara 1 cm = $m\ H'\ i = 90 \times 2 = 180$ cm⁴.

Momentul de inerţie al secţiei este deci

$$I = 5{,}4 \times 180 = 972 \text{ cm}^4$$

Prin metoda aceasta, datorită lui Culmann, am aflat momentul de inerţie al secţiei calculând suma momentelor de inerţie de forma Ωy^2 a diferitelor făşii. Acesta presupune că am luat făşii destul de mici pentru a neglija momentul de inerţie al lor, faţă de axa ce trece prin centrul lor de greutate. Luând făşii multe avem însă multe laturi la cele două funiculare, desenul este complicat şi exactitatea suferă.

Metoda a fost simplificată de către Mohr şi redusă la construirea unui singur poligon funicular. In adevăr laturile poligonului funicular ne dau pe axă segmentul s_1 şi avem

$$Hs_1 = a_1 y_1$$

aşa că elementul corespunzător al momentului de inerţie este

$$\Omega_1 y_1^2 = m a_1 y_1^2 = mHs_1 y_1$$

dar $s_1 y_1$ este tocmai dublul suprafeţei triunghiului măturat de raza funicularului (fig. 112) şi deci când vom aduna toate elementele, vom obţine dublul suprafeţei funicularului

$$I = \Sigma \Omega_i y_i^2 = 2\, mHF$$

Metoda are avantajul că nu este nevoie de două funiculare şi în loc de a lua fâşii multe, racordăm poligonul funicular într'o curbă funiculară tangentă la laturile trasate.

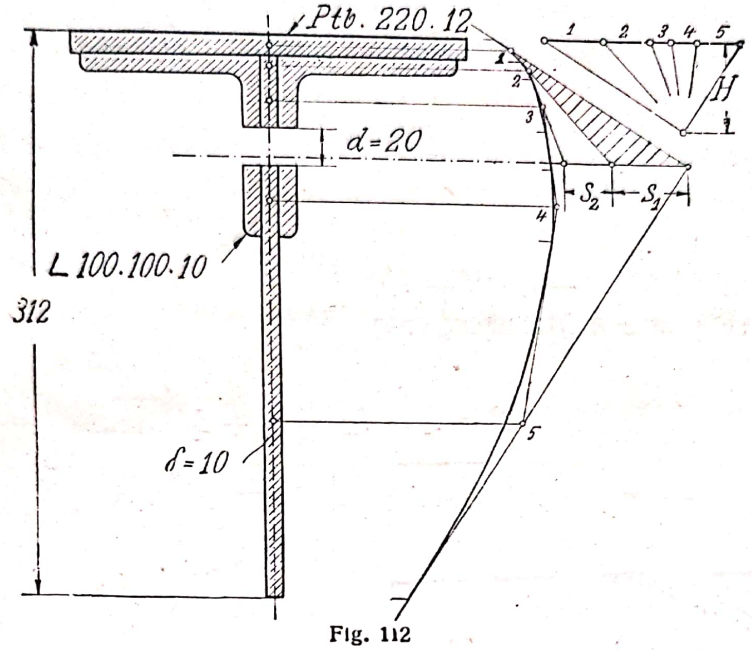


Fig. 112

La efectuarea calculelor trebue iarăşi să observăm unităţile. Suprafaţa funicularului F se calculează în cm², m şi H se citesc pe scara forţelor.

Suprafaţa funicularului se poate face uşor cu un planimetru. Se poate şi calcula cu ajutorul formulei lui Simpson

$$F = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots)$$

împărţind'o în fâşii de lăţime h cu ordonate y.

72. **Reprezentarea grafică a momentelor de inerţie.** Dacă luăm axele Ox, Oy la care am raportat secţia, O fiind centrul de greutate, putem da o reprezentare grafică (fig. 113) rezultatelor obţinute la variaţia momentelor de inerţie în jurul axelor.

Să luăm cercul cu centrul în C, al cărui diametru este $I_x + I_y$, şi pe acest diametru să luăm punctul M aşa ca $MO = I_x$, $MD = I_y$. Pe perpendiculara în M vom lua segmentul $MI = I_{xy}$, după semnul pe care îl are.

Vom avea deci pe figură

$$OM + MD = I_x + I_y$$

$$CM = CD - MD = \frac{1}{2}(I_x - I_y)$$

Unghiul $MCI = 2\beta$ este tocmai unghiul axelor principale căci avem

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{MI}{CM} = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

ducând diametrul AB vom găsi segmentele $AI = I_I$, $BI = I_{II}$, ceiace se poate arăta uşor, căci avem

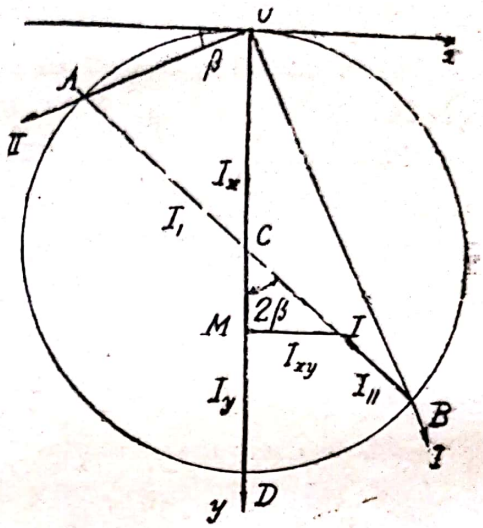


Fig. 113

$$AB = I_I + I_{II} = I_x + I_y$$

$$CI = \sqrt{\overline{CM}^2 + \overline{MI}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

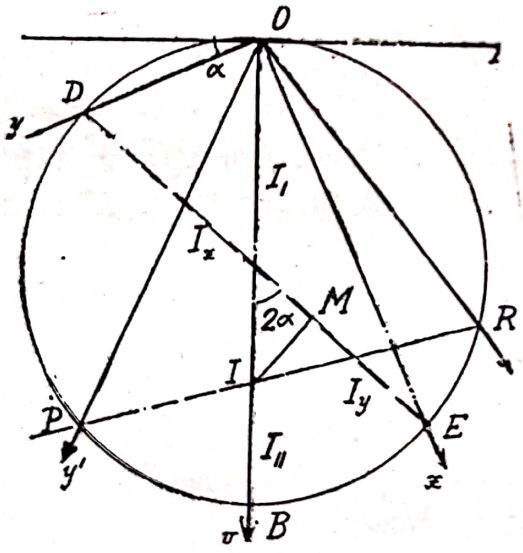


Fig. 114

şi deci

$$AI = AC + CI,$$

$$BI = CB - CI$$

Avem deci o construcţie grafică pentru a găsi axele principale şi valoarea momentelor principale.

Dacă invers, cunoaştem momentele de inerţie principale având de ex. o axă de simetrie a secţiei care ştim că este axă principală, ducem cercul pe diametrul cunoscut $OB = I_I + I_{II}$ şi avem (fig. 114) şi punctul I pe acest diametru care ne dă segmentele,

$$OI = I_I, \quad IB = I_{II}$$

Ducând diametrul DE la care corespund axele Ox şi Oy proectând punctul I în M, vom găsi

$$DM = DC + CM = \frac{I_I + I_{II}}{2} + \frac{I_I - I_{II}}{2}\cos 2\alpha$$

$$= I_I \cos^2 \alpha + I_{II} \sin^2 \alpha = I_x$$

$$ME = CE - CM = \frac{I_I + I_{II}}{2} - \frac{I_I - I_{II}}{2} \cos 2\alpha$$

$$= I_I \sin^2 \alpha + I_{II} \cos^2 \alpha = I_y$$

$$IM = \frac{I_I - I_{II}}{2} \sin 2\alpha = I_{xy}$$

Dacă ducem în loc de diametru o coardă PR, care să treacă prin I, vom obţine două axe Ox' Oy' faţă de care momentul de inerţie centrifugal, proecţia punctului I pe coardă, este nul. Aceste axe se numesc *axe conjugate.* Momentele de inerţie în raport cu aceste axe sunt date prin segmentele PI, IR.

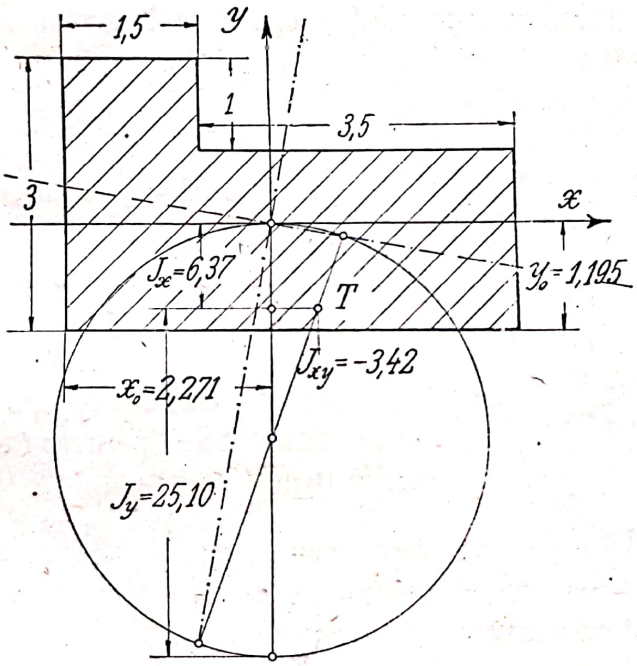


Fig. 115

Exemplu. In figura 115, se găseşte o secţie cu dimensiile în cm, şi determinate în mod grafic axele principale. Putem să facem acest calcul şi analitic. Vom avea pentru centrul de greutate.

$$x_0 = \frac{5 \times 2 \times 2{,}5 + 1 \times 1{,}5 \times 0{,}75}{5 \times 2 + 1 \times 1{,}5} = 2{,}271$$

$$y_0 = \frac{3 \times 1{,}5 \times 1{,}5 + 3{,}5 \times 2 \times 1}{3 \times 1{,}5 + 3{,}5 \times 2} = 1{,}195$$

Iar momentele de inerţie

$$I_x = \frac{1}{12}1{,}5 \times 3^3 + 1{,}5 \times 3\ (1{,}5 - 1{,}195)^2 + \frac{1}{12}3{,}5 \times 2^3 + 3{,}5 \times 2\,(1{,}195 - 1)^2 = 6{,}37$$

$$I_y = \frac{1}{12}3 \times 1{,}5^3 + 3 \times 1{,}5\,(2{,}271 - 0{,}75)^2 + \frac{1}{12}2 \times 3{,}5^3 + 3{,}5 \times 2\,(1.5 + 1{,}75 - 2{,}271)^2 = 25{,}10$$

$$I_{xy} = 3 \times 1{,}5\,(1{,}5 - 1{,}195)\ (0{,}75 - 2{,}271) + 3{,}5 \times 2\ (1{,}5 + 1{,}75 - 2{,}271)\ (1 - 1{,}195) = -\ 3{,}42$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \times 3{,}42}{25{,}10 - 6{,}37} = -\ 0{,}365$$

73. Elipsa de inerţie. Variaţia momentelor de inerţie se poate arăta şi cu ajutorul elipsei de inerţie (fig. 116). Dacă luăm axele principale OI, OII, atunci momentul faţă de o axă Ox, care face cu axa OI unghiul α îl scrim.

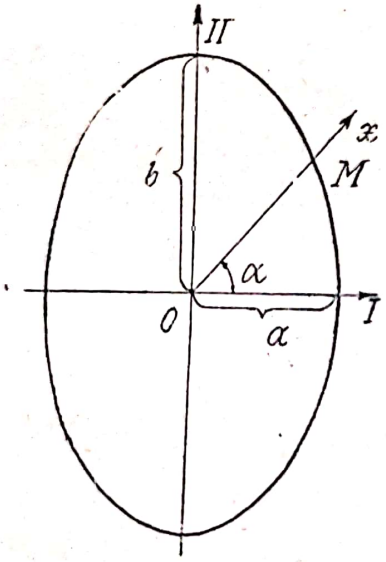


Fig. 116

$$I_x = I_I \cos^2\alpha + I_{II} \sin^2\alpha$$

Dacă pe axa O_x fixăm un punct M, aşa ca $OM = \frac{k}{r_x}$ atunci punctul M descrie o elipsă. Cantitatea

$$r_x^2 = \frac{I_x}{\Omega}$$

se numeşte *rază de giraţie* şi faţă de cele două axe principale avem razele de giraţie

$$a = \sqrt{\frac{I_I}{\Omega}} \quad , \quad b = \sqrt{\frac{I_{II}}{\Omega}}$$

In adevăr avem

$$OM = \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{k}{r_x}$$

de unde scoţând pe $\sin\alpha$ şi $\cos\alpha$ şi înlocuind prima relaţie găsim

$$k^2 \Omega = I_I\ x^2 + I_{II}\, y^2$$

sau

$$\frac{k^2}{a^2 b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ceiace ne dă ecuaţia unei elipse pentru care avem $k = ab$.

Cap. VII. Determinarea rezistenţelor în grindă.

74. **Definiţii.** Luând cazul cel mai general, al unei grinzi supusă la sarcini oarecare şi rezemată într'un mod oarecare, vom reduce acţiunea forţelor ce lucrează asupra bucăţii din stânga de ex. la centrul de greutate al secţiei şi vom găsi un moment şi o rezultantă. Vom avea, lucrând asupra secţiei şi raportate la axele principale ale secţiei şi axa grinzii, trei momente M_x, M_y, M şi trei forţe N_z, T_x, T_y. Proecţia după axă N_z este forţă normală, iar cele conţinute în secţie T_x, T_y sunt forţe tăietoare momentul după axa grinzii M_z este moment de răsucire, celelalte două M_x, M_y după axele secţiei, sunt momente încovoietoare.

Aceste acţiuni produc rezistenţele cunoscute, aşa că în cazul general avem asupra secţiei acţiunea încovoierii, răsucirii întinderii, tăierii.

In cazul particular când toate forţele întâlnesc axa grinzii, sau mai mult, sunt într'un plan care conţine axa, momentul faţă cu această axă M_z este nul. In acest din urmă caz se vorbeşte de *încovoiere plană* şi nu avem răsucire. Planul forţelor taie secţia după o linie dreaptă numită *linia forţelor*, momentul încovoietor este perpendicular pe planul forţelor, şi deci axa momentului este conţinută în planul secţiei şi perpendiculară pe linia forţelor.

Putem să simplificăm şi mai mult, să luăm cazul când toate forţele sunt normale pe axa grinzii, în general orizontală şi forţele verticale. In acest caz se vorbeşte de *încovoiere simplă* şi nu mai avem o componentă după axa grinzii adică forţă normală, ci numai moment încovoietor şi forţă tăietoare

In fine avem cazul particular când momentul încovoietor fiind constant forţa tăietoare este nulă. In acest caz se vorbeşte de *încovoiere curată*, căci nu avem decât moment încovoietor fără forţă tăietoare. Aceasta se întâmplă şi în cazul secţiei unde momentul este maxim, şi unde calculăm secţia periculoasă.

Ne vom ocupa întâi de încovoierea simplă şi plană. După aceia vom cerceta cazul încovoierii cu întindere sau compresiune, şi al încovoierii cu răsucire, care au aplicaţii importante.

75. **Incovoiere curată. Linia forţelor este o axă principală.** Să luăm două secţii vecine, depărtate cu dx. Prin rotaţia produsă de momentul încovoietor M secţia se roteşte cu unghiul $d\varphi$ (fig. 117).

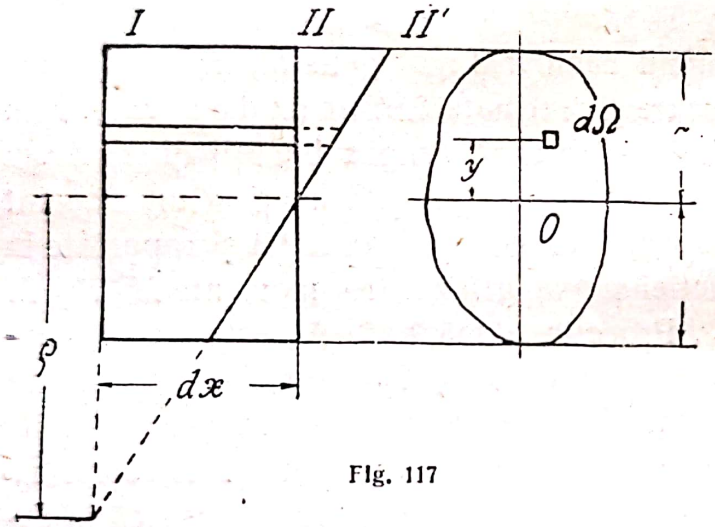


Fig. 117

Raportăm secţia la două axe Ox, Oy, care sunt axele principale. Forţele lucrează după axa verticală Oy, care este linia forţelor, momentul M perpendicular pe planul forţelor lucrează după axa orizontală Ox.

Intr'un element $d\Omega$, de coordonate x, y, vom avea o rezistenţă σ, care este legată cu deformaţia ε prin relaţia cunoscută în baza ipotezii secţiilor plane pe care am făcut'o.

$$\varepsilon = y\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\sigma = Ey\frac{d\varphi}{dx}$$

deci rezistenţele variază liniar, nule în axă, care ia numele de *axa neutră*, proporţionale cu distanţa y la axa neutră, maxime în punctele cele mai depărtate de axa neutră.

Rezistenţele, astfel repartizate pe secţie, trebuie să îndeplinească condiţiile de echilibru

$$\int \sigma\, d\Omega = E\frac{a\varphi}{dx}\int y\, d\Omega = O$$

ceiace ne arată că axa neutră trece prin centrul de greutate.

$$\int \sigma x d\,\Omega = E\frac{d\varphi}{dx}\int x\,y\,d\,\Omega = 0$$

ceiace ne arată, $I_{xy} = 0$, deci axele noastre sunt axe principale. In fine

$$\int \sigma y d\,\Omega = E\frac{d\varphi}{dx}\int y^2\,d\,\Omega = M$$

de unde

$$\sigma = \frac{M\,y}{I}$$

Aceasta este formula lui *Navier* pe care, am stabilit'o la Cap. III. § 5 şi pe care o întrebuinţăm în acest caz, când axa momentului este o axă principală.

Rezistenţele maxime au loc în punctele cele mai depărtate de axa neutră

$$\sigma_{1max} = \frac{M}{\left(\frac{I_x}{a_1}\right)} = \frac{M}{W_{1x}}\ ,\quad \sigma_{2max} = \frac{M}{\left(\frac{I_x}{a_2}\right)} = \frac{M}{W_{2x}}$$

Rezistenţele maxime sunt acelea care ne interesează şi cu ajutorul lor facem verificarea şi dimensionarea secţiilor supuse la încovoiere.

Exemple. O grindă de lemn 24 × 28, de 3,25 m deschidere, trebue să suporte la mijloc o sarcină $P = 3$ t. Avem

$$M = \frac{Pl}{4} = \frac{3000 \times 3{,}25}{4} = 244000 \text{ kgcm}$$

$$W = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}24 \times 28^2 = 3136 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{ef} = \frac{244000}{3136} = 77{,}8 \text{ kg/cm}^2$$

O grindă de fier de profil *I*, suportă un perete de cărămidă pe o deschidere de 5 m şi o înălţime de 3,50 m.

$$G = 5 \times 3{,}50 \times 0{,}30 \times 1600 = 8400 \text{ kg.}$$

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{8400 \times 500}{8} = 525000 \text{ kgcm}$$

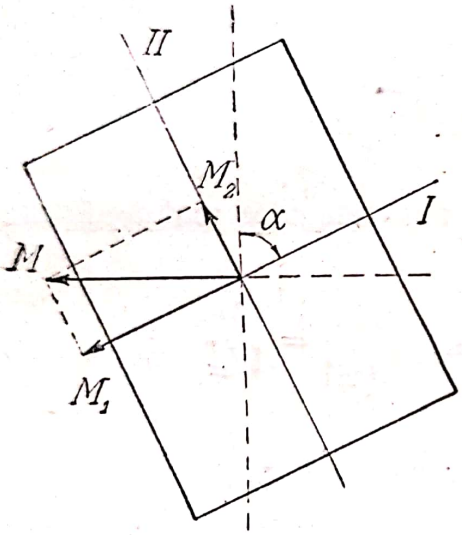
$$W_{necesar} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{525000}{1200} = 430 \text{ cm}^3$$

alegem *NPI* 26, care are $W_{ef} = 442$ cm³. Dacă verificăm la greutatea proprie $g = 41{,}09$ kg/ml.

$$M_g = \frac{pl^2}{8} = \frac{41{,}9 \times 5 \times 500^2}{8} = 13125 \text{ kgcm}$$

$$\sigma_{ef} = \frac{525000 + 13125}{1142} = 1217 \text{ kg/cm}^2$$

76. Cazul II. Axa momentului nu este o axă principală. Să luăm cazul când axa momentului M face un unghiu α cu axa Oy (fig. 118). Vom avea atunci cele două componente ale momentului după axele principale.



Flg 118

$$M_2 = M \cos \alpha$$
$$M_1 = M \sin \alpha$$

Aceste două momente lucrând după axele principale putem să aflăm rezistenţele pe care ele le produc într'un element $d\Omega$ de coordonate x, y, rezistenţe ce sunt normale pe secţie deci se vor aduna şi avem

$$\sigma = \frac{M_1 y}{I_1} + \frac{M_2 x}{I_2}$$

Rezistenţele vor varia deci liniar, vom avea o axă neutră în care rezistenţele sunt nule şi care este o linie dreaptă ce trece prin centrul de greutate, şi al cărei coeficient unghiular este

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x} = \frac{I_x}{I_y} \frac{M_2}{M_1} = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{cotg} \alpha$$

deci o direcţie conjugată cu linia forţelor.

Rezistenţele maxime vor fi

$$\sigma_{max} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2}$$

în punctele cele mai îndepărtate de axa neutră şi când amândouă vor fi tensiuni sau compresiuni.

Să considerăm secţia noastră cu axele principale Ox, Oy, axa momentului M făcând unghiul α cu axa Ox. Să luăm

axa neutră Ox_1, care face unghiul β cu axa Ox şi să considerăm distanţa unui element $d\Omega$ (x, y) de la axa neutră y_1. Vom avea (fig. 119)

$$y_1 = x \sin\beta + y \cos\beta$$

$$I_{x1} = I_x \sin^2\beta + I_x \cos^2\beta$$

deoarece axele fiind principale $I_{xy} = 0$

Axa momentului M face cu axa neutră unghiul

$$\theta = \alpha - \beta$$

Dacă vom considera acum rezistenţa

$$\sigma = \frac{M\cos\alpha \cdot y}{I_x} + \frac{M\sin\alpha \cdot x}{I_y}$$

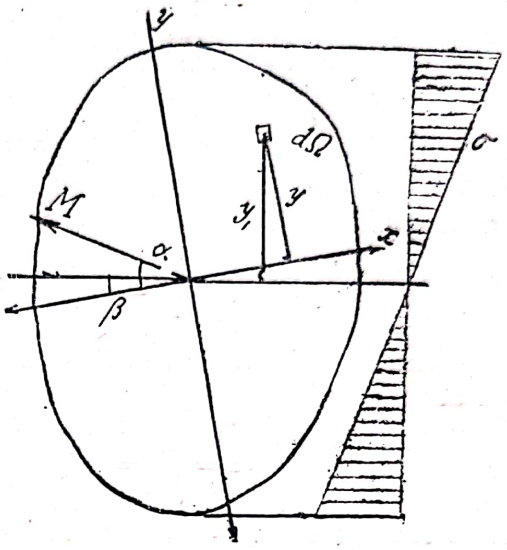


Fig. 119

şi vom căuta să eliminăm pe I_x, I_y, x, y, α, β, pentru a exprima rezistenţa numai în funcţie de I_{x1}, y_1 şi θ, vom găsi

$$\sigma = M \frac{I_y\, y \cos\alpha + I_x\, x \sin\alpha}{I_x\, I_y} \quad \frac{I_y \cos^2\alpha + I_x \sin^2\alpha}{I_y \cos^2\alpha + I_x \sin^2\alpha}$$

$$= M \frac{(y + x \operatorname{tg}\beta)\ (\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tg}\beta)}{I_x + I_y \operatorname{tg}^2\beta}$$

$$= M \frac{(x \sin\beta + y \cos\beta)\ (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{I_x \cos^2\beta + I_y \sin^2\beta}$$

$$= M \cos\theta \frac{y_1}{I_{x1}}$$

adică formula lui Navier, în care momentul încovoietor este, după axa neutră, proecţia momentului M.

Rezistenţele variază deci liniar, proporţional cu distanţa la axa neutră, maxime în punctele cele mai depărtate de axa neutră.

Exemplu. O grindă de scaun are secţia 15 × 20 cm, o deschidere de 4,25 m, şi susţine o sarcină de 250 kg/ml. Inclinarea acoperişului este 30°.

Momentul încovoietor este

$$M = \frac{pl^2}{8} = \frac{250 \times 4{,}25 \times 425}{8} = 56400 \text{ kgcm}$$

$$M_x = M \cos \alpha = 56400 \times 0{,}866 = 48800 \text{ kgcm}$$

$$M_y = M \sin \alpha = 56400 \times 0{,}500 = 28200 \text{ kgcm}$$

Modulele de rezistenţă sunt

$$W_x = \frac{1}{6} 15 \times 20^2 = 1000 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{1}{6} 20 \times 15^2 = 750 \text{ cm}^3$$

aşa că avem

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{48800}{1000} + \frac{28200}{750} = 86{,}4 \text{ kg/cm}^2$$

Dacă grinda nu ar fi fost înclinată, ci aşezată cu axa verticală am fi avut

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{56400}{1000} = 56{,}4 \text{ kg/cm}^2$$

deci o rezistenţă mai mică. Prin înclinarea axelor secţia lucrează mai defavorabil, rezistenţele au crescut.

In cazul când avem de rezolvat problema inversă, dimensionarea secţiei, aceasta apare prin două necunoscute, W_x, W_y Vom scrie atunci

$$W_x = \frac{M_x + \frac{W_x}{W_y} M_y}{\sigma_a}$$

raportul $\frac{W_x}{W_y} = k$ se poate evalua aproximativ şi se admite pentru un prim calcul $k = 1 - 1{,}4$ pentru secţii dreptunghiulare din lemn, $k = 9$ pentru fiare I, $k = 7$ pentru fiare $\sqsubset$.

Putem astfel calcula pe W_x necesar, alegem secţia, şi pe urmă verificăm rezistenţele.

Exemplu. Un acoperiş de tablă ondulată este aşezat pe fiare Z. Deschiderea grinzilor este 4,00 m, sarcina 180 kg/m^2, unghiul acoperişului 16°.

$$M_x = \frac{pl^2}{8} \cos \alpha = \frac{1}{8} 180 \times 4 \times 400 \times 0{,}966 = 34800 \text{ kgcm}$$

$$M_y = \frac{pl^2}{8} \sin \alpha = \frac{1}{8} 180 \times 4 \times 400 \times 0{,}259 = 9300 \text{ kgcm}$$

de unde

$$W_{neces} = \frac{M_x + k M_y}{\sigma_a} = \frac{34800 + 7 \times 9300}{1200} = 83{,}2 \text{ cm}^3$$

Scanned with OKEN Scanner

alegem Z 14, $W_x = 86{,}4$ cm³, $W_y = 14{,}8$ cm³ şi vom calcula rezistenţa efectivă luând şi greutatea proprie acum cunoscută, $p = 180 + 16 = 196$ kg/ml

$$M_x = \frac{1}{8} 196 \times 4 \times 400 \times 0{,}966 = 37800 \text{ kgcm}$$

$$M_y = \frac{1}{8} 196 \times 4 \times 400 \times 0{,}259 = 10150 \text{ kgcm}$$

de unde

$$\sigma_{ef} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{37800}{86{,}4} + \frac{10550}{14{,}8} = 1122 \text{ kg/cm}^2$$

77. **Tăierea.** Forţa tăietoare care lucrează în secţie va produce rezistenţe tangenţiale τ, dar în cazul acesta nu mai este valabilă ipoteza repartiţiei uniforme a acestor rezistenţe.

Forţa tăietoare T, conţinută în planul forţelor lucrează în linia forţelor, iar rezistenţele τ care iau naştere în secţie trebuie să-i facă echilibru (fig. 120).

Singurele condiţii ce le putem scrie sunt:

$$\int \tau_y \, d\Omega = T \quad , \quad \int \tau_x \, d\Omega = 0$$

care nu pot determina componentele τ_x, τ_y. Se poate admite o distribuţie oarecare, se pot face ipoteze asupra direcţiei acestor rezistenţe, fără a le putea determina.

Ştim însă că rezistenţele τ ce apar în planul secţiei fac să nască în planul normal pe această secţie, deci paralel cu axa grinzii, rezistenţe egale şi de semn contrar. Acesta este fenomenul lunecării longitudinale, adică lunecarea ce se produce de-alungul grinzii.

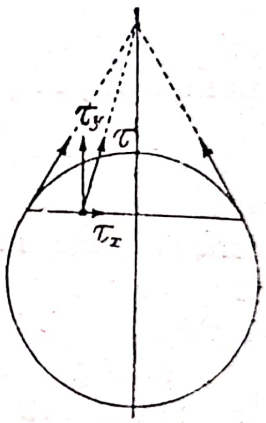


Fig. 120

78. **Lunecarea longitudinală.** Să luăm în grinda noastră două secţii vecine, depărtate între ele cu dx. Momentul încovoietor variind cu secţia vom avea rezistenţe normale diferite pe cele două feţe.

Dacă luăm o parte din secţie situată deasupra unei paralele la axa neutră la distanţa y_1, haşurată în figură, (fig. 121) urmează că diferenţa de rezistenţă pe cele două feţe se va transmite prin lunecare la restul grinzii, dând naştere la o rezistenţă în suprafaţa orizontală longitudinală. Presupunem că aceasta ar fi uniform repartizată pe lăţimea b, şi atunci

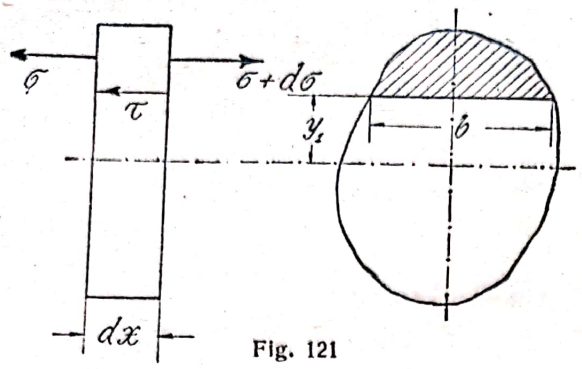


Fig. 121

$$\tau\, b dx = \int_{y_1}^{a} d\sigma d\,\Omega$$

ori cum după formula lui Navier avem

$$\sigma = \frac{M y}{I}$$

rezultă

$$\tau b = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{I}\right)\int_{y_1}^{a} y d\,\Omega = \frac{d}{dx}\left(\frac{M}{I}\right) S_x$$

n care S_x este momentul static al suprafeţei haşurate faţă cu axa neutră a secţiei.

Cum într'o grindă poate varia şi M şi I avem

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{M}{I}\right) = \frac{1}{I}\frac{dM}{dx} - \frac{M}{I^2}\frac{dI}{dx}$$

luând secţia constantă, nu variază decât M şi găsim

$$\tau = \frac{T S_x}{b I}$$

formulă care ne dă lunecarea longitudinală şi deci şi rezistenţa la tăiere.

a) Secţia dreptunghiulară. In acest caz (fig. 122)

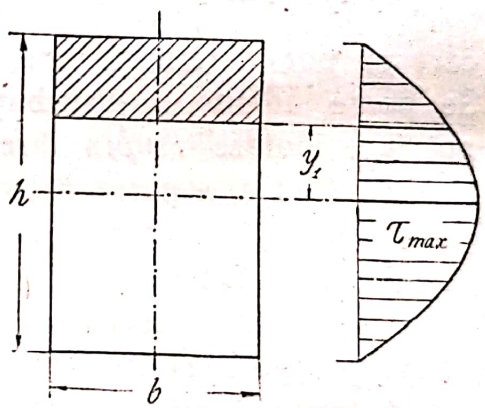


Fig. 122

$$S_x = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\left[\frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

$$\tau = \frac{T}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

se vede că τ variază după o parabolă, fiind nul la marginile secţiei şi maxim în axa neutră.

$$\tau_{max} = \frac{Th^2}{8I} = \frac{3}{2}\frac{T}{bh} = \frac{3T}{2\Omega}$$

Vedem că rezistenţa maximă este cu 50% mai mare decât aceia obţinută prin ipoteza rezistenţelor uniform distribuite.

b) Secția compusă din dreptunghiuri. (fig. 123). Pentru tălpi avem ca și în cazul precedent

$$\tau = \frac{T}{2I}\left(\frac{H^2}{4} - y_1^2\right)$$

pentru inimă se schimbă lățimea și suprafața care alunecă, așa în cât vom avea

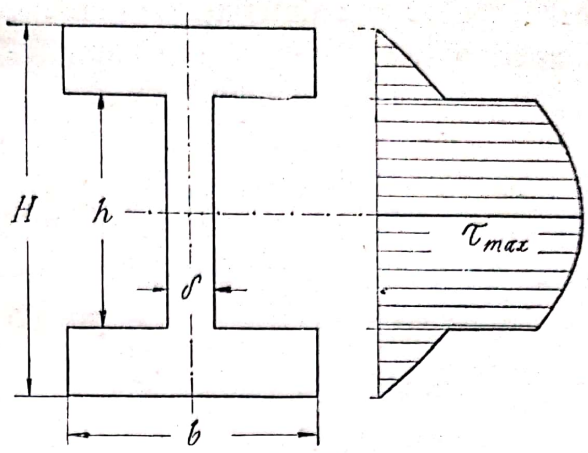


Fig. 123

$$\tau = \frac{T}{\delta I}\left(\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} b y dy + \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} \delta y dy\right) = \frac{T}{8I}\left[\frac{b}{\delta}(H^2 - h^2) + h^2 - 8y_1^2\right]$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{8I}\left[\frac{b}{\delta}(H^2 - h^2) + h^2\right]$$

La fiarele profilate pentru a evita variația bruscă de rezistență, se rotunjește unghiul intrând și se dă tălpilor o înclinare.

c) Secție circulară. In acest caz avem (fig. 124).

$$S_x = \int_{y_1}^{a} b y dy = 2\int_{y_1}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, y dy = \frac{2}{3}(a^2 - y_1^2)^{\frac{3}{2}}$$

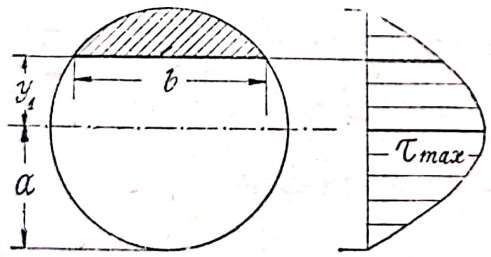


Fig. 124

de unde

$$\tau = \frac{T}{3I}(a^2 - y_1^2)$$

variația rezistenței este deci tot după o parabolă, iar maximul are loc în axa neutră

$$\tau_{max} = \frac{Ta^2}{3I} = \frac{4T}{3\Omega}$$

vedem că rezistența maximă este cu 33% mai mare decât aceia obținută prin ipoteza rezistențelor uniform distribuite.

79. **Rezistențele într'o secție înclinată. Rezistențe principale.** Să luăm în interiorul grinzii o prismă triunghiulară, având o față în secția normală, alta în secția longitudinală și o față înclinată sub un unghiu α. In primele două fețe vor lucra

rezistenţele σ şi τ determinate mai înainte, iar în faţa înclinată vom avea rezistenţele σ' şi τ'. (fig. 125)

Condiţiile de echilibru ne dau

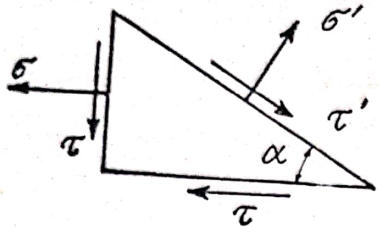


Fig. 125

$$\sigma' = \sigma \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau' = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

Aceste două componente variază cu unghiul α. Să aflăm maximul lui σ'. El are loc pentru

$$\frac{d\sigma'}{d\alpha} = 2\sigma \sin \alpha \cos \alpha + 2\tau \cos 2\alpha = 0$$

care este tocmai $\tau' = 0$, deci când rezistenţele normale sunt maxime, rezistenţele tangenţiale sunt nule. Valoarea unghiului pentru care are loc maximul rezistenţei normale este

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{2\tau}{\sigma}$$

iar aceste valori maxime sunt

$$\sigma_{I,II} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

aceste două valori maxime sunt pentru două direcţii perpendiculare, căci unghiurile ce satisfac ecuaţia sunt α_1 şi $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$.

Să aflăm maximul lui τ'. El are loc pentru

$$\frac{d\tau'}{d\alpha} = 2\frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha - 2\tau \sin 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \frac{\sigma}{2\tau}$$

adică tocmai relaţia inversă celei precedente, de unde deducem că rezistenţele tangenţiale sunt maxime pentru direcţii care sunt bisectoarele direcţiilor ce fac maxime rezistenţele normale, căci

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 90^0$$

valorile maxime sunt

$$\tau_{I,II} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valorile maxime obţinute se numesc *rezistenţe principale.* Din expresiunile de mai sus deducem

$$\sigma_I + \sigma_{II} = \sigma$$

rezultă deci că cele două rezistenţe principale sunt de semne contrarii, dacă una e tensiune cealaltă e compresiune.

Putem scrie rezistenţele într'o secţie înclinată şi cu ajutorul rezistenţelor principale.

Să luăm prisma cu cele două feţe după direcţiile principale, (fig. 126) aşa în cât în aceste feţe să nu lucreze decât rezistenţele principale căci ştim că atunci rezistenţele tangenţiale sunt nule. In faţa înclinată vor lucra σ' şi τ'.

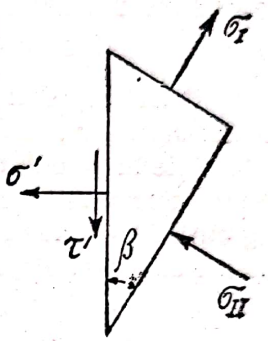


Fig. 126

Putem scrie

$$\sigma' = \sigma_I \sin^2\beta - \sigma_{II}\cos^2\beta$$

$$\tau' = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\sin 2\beta$$

Variaţia rezistenţelor se poate reprezenta grafic. Dacă scriem valoarea rezistenţelor σ' şi τ' într'o faţă înclinată sub forma

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau' = +\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha$$

vom avea eliminând unghiul 2α

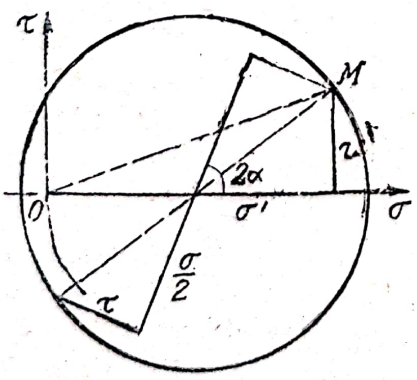


Fig. 127

$$\left(\sigma' - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau'^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \tau^2 = \text{const.}$$

adică ecuaţia unui cerc. Dacă deci luăm pe o axă $\frac{\sigma}{2}$ iar la extremităţi ducem perpendiculara τ vom obţine unghiul 2α şi deci direcţia rezistenţelor normale principale. Bazaţi pe proprietatea $\sigma_I + \sigma_{II} = \sigma$ luăm $CO = \frac{\sigma}{2}$ şi vom avea (fig. 127)

$$OA = \sigma_{II} \ , \ OA' = \sigma_I$$

Dacă ducem raza OM aceasta ne dă rezistenţele într'o secţie înclinată prin componentele ei σ' şi τ' căci

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha + \tau \sin 2\alpha$$

$$\tau' = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

care sunt tocmai relaţiile precedente în care σ apare cu semnul negativ fiind compresiune.

O altă reprezentare a variaţiei rezistenţelor este aceia a *traectoriilor rezistenţelor principale.* Dacă în fiecare punct ducem direcţia principală şi ne închipuim curba a cărei tangentă în acel punct este tocmai direcţia principală, avem traectoriile rezistenţelor principale. Este ceva analog cu liniile de forţă din electricitate, care ne arată în orice punct intensitatea câmpului electric. In figură (fig. 128) se găsesc trasate cele două serii de curbe, una pentru σ_I a doua pentru σ_{II} care sunt reprezentate în orice punct prin tangentele la aceste curbe. Cele două serii de curbe se taie în unghiu drept fiindcă rezistenţele principale sunt perpendiculare una pe alta. Ele taie axa neutră sub un unghiu de 45°, fiindcă în acest punct $\sigma = 0$ deci $\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \infty$, pe când cele două laturi ale grinzii unde $\tau = 0$ sunt tăiate sub un unghiu de 90°.

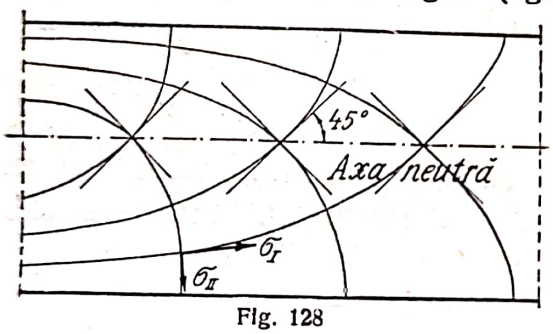


Fig. 128

Traiectoriile rezistenţelor principale ne dau o imagină a variaţiei rezistenţelor în interiorul corpului, arătându-ne intensitatea câmpului elastic.

După variaţia rezistenţelor putem în unele cazuri să întărim construcţiile. Astfel la grinzile metalice cu inima subţire şi înaltă ce poate rezista la tensiune, se poate produce o umflare din cauză că inima nu poate lua rezistenţele la compresiune. Mai cu seamă în vecinătatea reazemelor forţa tăietoare creşte şi cu ea şi rezistenţa la lunecare longitudinală, care sporeşte valoarea rezistenţei maxime la compresiune. Se întăreşte atunci grinda nituind pe inimă o cornieră la 45°, care să ia rezistenţele maxime la compresiune (fig. 129).

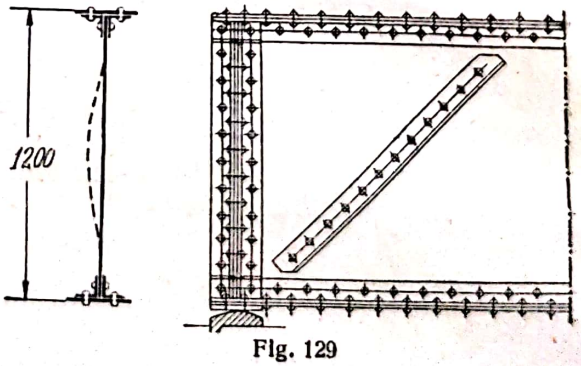


Fig. 129

La grinzile de beton armat se prezintă problema inversă. Betonul

rezistă bine la compresiune, dar nu poate lua rezistenţele la întindere şi se pun bare de fier ca armătură. Barele de fier trebuesc deci aşezate în direcţia rezistenţelor principale la tensiune, adică la 45°, pe când rezistenţele principale la compresiune le ia betonul, lucrând după direcţiile haşurate (fig. 130).

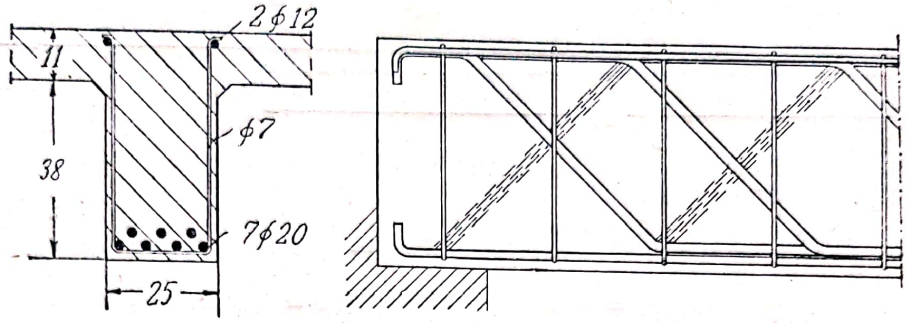


Fig. 130

In fine la corpurile vii aranjarea materialului care joacă rolul de rezistenţă se face întocmai după aceste legi. Astfel fibrele lemnului în regiunile unde bat vânturile constante, sau fibrele rezistente ale oaselor, urmează traectoriile rezistenţelor principale.

80. **Dimensionarea secţiilor la grinzile supuse la încovoiere.** Intrebuinţăm formulele stabilite mai sus, după cazuri, pentru a dimensiona secţia grinzilor încovoiate. De obicei se alege o secţie constantă pe toată lungimea grinzii, care se dimensionează la momentul încovoietor maxim. Dacă întrebuinţăm o secţie plină dreptunghiulară sau circulară această dimensionare este în general suficientă, secţia rezistând şi la forţa tăietoare maximă. Acelaşi lucru pentru cazul când alegem fiare profilate, care sunt aşa fel dimensionate încât să reziste la lunecarea longitudinală.

Când momentul încovoietor este prea mare şi nu putem alege o grindă din profilele laminate, vom face o secţie din table, corniere sau alte profile, pe ca e le nituim sau le sudăm. O asemenea grindă o calculăm la rezistenţele normale date de momentul încovoietor, iar legătura între piese, adică îmbinarea lor o calculăm la rezistenţele tangenţiale produse de forţa tăietoare. Tot aşa îmbinăm între ele şi mai multe grinzi de lemn când una nu este de ajuns pentru a lua momentul încovoietor maxim.

a) *Calculul unei grinzi nituite.* Să calculăm ca exemplu, o grindă de pod de 10 m deschidere, care trebue să suporte o locomotivă după diagrama din figură. Sarcina este indirectă, avem trei panouri, deci momentul încovoietor maxim va trebui căutat în dreptul unui nod (fig. 131).

De asemenea forţa tăietoare este maximă în panoul dela margine şi vom determina poziţia convoiului pentru aceasta.

Prin încercări stabilim că momentul maxim are loc pentru poziţia

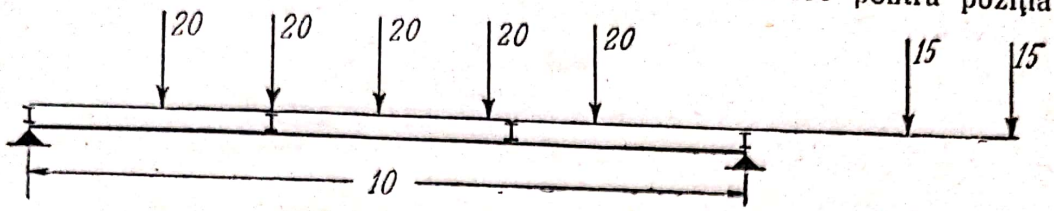


Fig. 131

din figură pentru care avem

$$A = \frac{2 \times 50\,(6{,}66 - 1.5)}{10} = 5{,}16 \text{ t}$$

$$M_{max} = 51{,}6 \times 3{,}33 - 20 \times 1{,}5 = 142 \text{ tm}$$

acest moment încovoietor îl repartizăm la cele două grinzi, luând pentru o grindă $M = 71$ tm

Trebuie să considerăm şi greutatea proprie pe care o evaluăm la 1800 kg/ml, adică pentru o grindă, în nodul considerat

$$M = \frac{p}{2} x\,(l - x) = \frac{900}{2} 3{,}33 \times 6{,}66 = 10.000 \text{ kgm}$$

aşa că grinda va trebui să aibă

$$W_{neces} = \frac{7\,100\,000 + 1.000\,000}{1200} = 6750 \text{ cm}^3$$

vom întocmi secţia din fiare profilate ca în (fig. 132), două platbande,

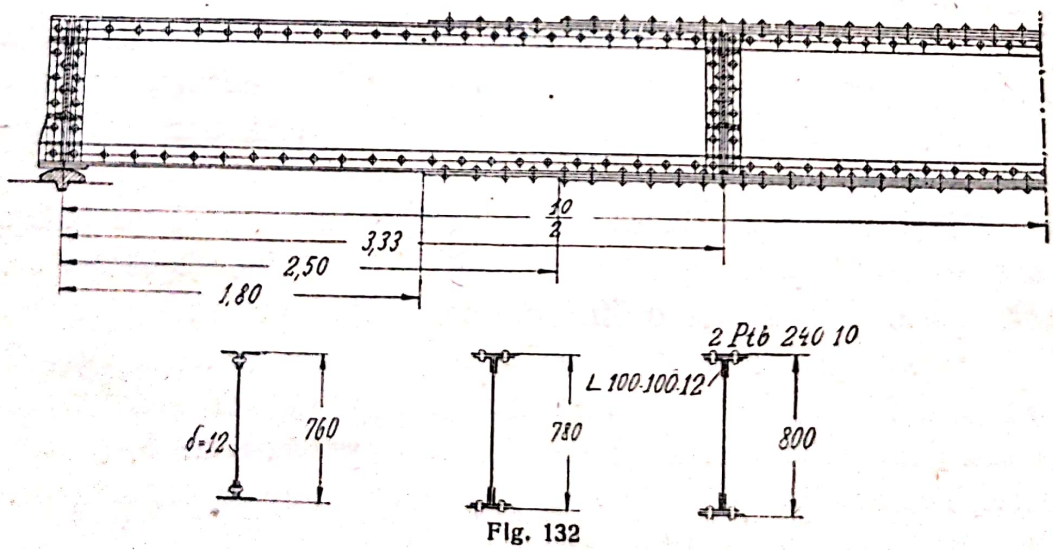


Fig. 132

patru corniere şi o inimă nituite între ele. Vom avea cu dimensiile alese

$$I_x = \frac{24}{12}(80^3 - 76^3) + 4\,(207 + 22{,}7 \times 35{,}1^2) + \frac{1}{12} 1{,}2 \times 76^3 -$$

$$4\,(\frac{1}{12} 2 \times 3{,}2^3 + 2 \times 3{,}2 \times 38{,}4^2) = 264753 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{264753}{40} = 6619 \text{ cm}^3$$

putem considera bună această secţie, căci nu se depărtează mult de valoarea cerută.

Momentul scade spre reazem şi nu mai avem nevoie de aceiaşi secţie. Putem să o slăbim, lăsând o platbandă şi avem

$$I_x = \frac{24}{12}(78^3 - 76^3) + 4\,(207 + 22{,}7 \times 35{,}1^2)$$

$$+ \frac{1{,}2}{12} 76^3 - 4\,(\frac{1}{12} 2 \times 2{,}2^3 + 2 \times 2{,}2 \times 37{,}9^3) = 201633 \text{ cm}^4$$

$$W_x = \frac{201633}{39} = 5170 \text{ cm}^3$$

această secţie va putea lua un moment încovoietor

$$M_{cap} = W_x \sigma_a = 5170 \times 1200 = 6204000 \text{ kgcm}$$

şi cum momentul variază liniar ar putea fi păstrată până la o distanţă

$$e = \frac{6\,204\,000}{8\,100\,000} 3{,}33 \cong 2{,}50 \text{ m}$$

de la reazem, unde momentul este mic.

Putem să scădem secţia şi mai mult, căci momentul scade mai departe, şi să lăsăm şi a doua platbandă. Atunci avem

$$I_x = (207 + 22{,}7 \times 35{,}1^2) + \frac{1}{12} 1{,}2 \times 76^3 - 2\,(\frac{1}{12} 3{,}6 \times 2^3 + 2 \times 3{,}6 \times 32^2) = 141761$$

$$W_x = \frac{141761}{38} = 3730 \text{ cm}^3$$

această secţie ar putea lua un moment încovoietor

$$M_{cap} = W \sigma_a = 3730 \times 1200 = 4\,476\,000 \text{ kgcm}$$

şi deci ar putea fi păstrată până la o distanţă

$$e = \frac{4\,476\,000}{8\,100\,000} 3{,}33 = 1{,}84 \text{ m}$$

de la reazem.

Pentru nituire se determină lunecarea

$$\tau = \frac{TS}{bI}$$

aci însă τ care ar exista pe suprafaţa $b\,e$, în care e este distanţa între două nituri, este luat de rezistenţa nitului deci

$$R = b\,e\,\tau = \frac{T\,e}{I} S$$

în care S este momentul static al suprafeţei care alunecă în raport cu axa neutră.

Trebue determinată deci forţa tăietoare, şi prin încercări stabilim că maximul ei are loc tot pentru aceiaşi poziţie a convoiului, când roata a doua calcă în nod

$$T = A - P' = \frac{100 \times 5{,}16}{10} - \frac{20 \times 1{,}5}{3{,}33} = 42{,}6 \text{ t}$$

pe când aceea provenită din sarcina uniform distribuită este

$$T = \frac{p\,l}{2} - \frac{p\lambda}{2} = \frac{1800}{2}(10 - 3{,}33) = 6000 \text{ kg}$$

Aşa că ne revine pentru una din grinzi

$$T = \frac{42600 + 6000}{2} = 24300 \text{ kg}$$

Rezistenţa unui nit, şi anume a celui mai aproape de axa neutră care este cel mai încărcat, şi care are două secţii de tăiere este

$$R = 2\frac{\pi d^2}{4}\tau = 2 \times 3{,}14 \times 1000 = 6280 \text{ kg}$$

aşa că vom putea calcula distanţa între nituri şi pentru primul interval avem

$$e = \frac{R\,I}{TS} = \frac{6280 \times 141761}{24300 \times 2 \times 22{,}7 \times 45{,}1} \cong 23 \text{ cm}$$

Pentru intervalul al doilea

$$e = \frac{6280 \times 201633}{24300\,(2 \times 22{,}7 \times 35{,}1 + 24 \times 38{,}5)} = 20{,}7 \text{ cm}$$

iar pentru al treilea

$$e = \frac{6280 \times 264753}{24300\,(2 \times 22{,}7 \times 35{,}1 + 24 \times 2 \times 39)} = 19{,}8 \text{ cm}$$

Trebuind să alegem pentru condiţia de solidarizare a pieselor $e = 6\,d =$ 120 mm cel puţin, vedem că prin aceasta suntem asiguraţi şi contra lunecării.

b) *Calculul unei grinzi sudate.* Să luăm o grindă de $l = 9{,}40$ m deschidere, care are o sarcină uniform distribuită $p = 8{,}5$ tone/ml.

Vom avea

$$M_{max} = \frac{pl^2}{8} = \frac{8{,}5 \times 9{,}4^2}{8} = 93{,}88 \text{ tm}$$

$$T_{max} = \frac{pl}{8} = \frac{8{,}5 \times 9{,}4}{2} = 39{,}95 \text{ tm}$$

rezultă că vom avea nevoe de

$$W_{neces} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{9388000}{1400} = 6705 \text{ cm}^3$$

Vom compune o secţie având două platbande 400×20 mm şi o inimă de 15 mm grosime. Alegând înălţimea secţiei 750 mm (fig. 133) vom avea

$$I = \frac{40}{12}(75^3 - 71^3) + \frac{1,5}{12}71^3 = 257953 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{257953}{37,5} = 6879 \text{ cm}^3$$

Secţia dimensionată este calculată pentru momentul maxim din mijloc şi valoarea momentului la care poate rezista grinda este

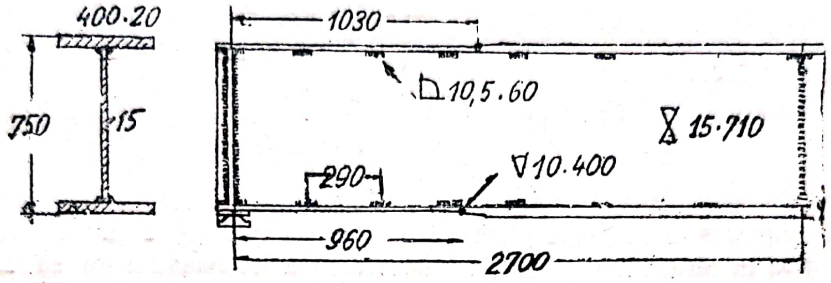


Fig. 133

$$M_{cap} = W\sigma_a = 6879 \times 1400 = 9630000 \text{ kgcm}$$

către reazeme momentul scade şi nu vom mai avea nevoie de această secţie. Să luăm către margine o platbandă 400×10 mm, şi vom avea

$$I_1 = \frac{40}{12}(73^3 - 71^3) + \frac{1,5}{12}71^3 = 148500 \text{ cm}^4$$

$$W_1 = \frac{148500}{36,5} = 4068 \text{ cm}^3$$

şi momentul pe care îl poate suporta această secţie este dat de

$$M_{1\,cap} = W_1 \sigma_a = 4068 \times 1400 = 5695000 \text{ kgcm}$$

Distanţa dela care avem acest moment este dată de

$$\frac{px}{2}(1 - x) = M_1 \,, \quad \frac{pl^2}{8} = M$$

$$x(1 - x) = \frac{M_1 l^2}{4M} = \frac{5695 \times 9,4^2}{4 \times 9630} = 13,06$$

care ne dă prin încercări soluţia

$$1,69 \times 7,71 = 13,03$$

In locurile unde schimbăm grosimea platbandei trebue să facem o îmbinare sudată. In talpa de sus îmbinarea este supusă la compresiune şi rezistenţa admisibilă este

$$\sigma'_a = 0,85\,\sigma_a = 0,85 \times 1400 = 1190 \text{ kg/cm}^2$$

pe când în talpa de jos vom avea tensiune pentru care rezistenţa admisibilă este

$$\sigma''_a = 0,75\,\sigma_a = 0,75 \times 1400 = 1050 \text{ kg/cm}^2$$

Aceste două îmbinări se vor face deci în secţiile unde momentele încovoietoare iau valorile

$$M' = W_1 \sigma'_a = 4068 \times 1190 = 4841000 \text{ kgcm}$$

$$M'' = W_1 \sigma''_a = 4068 \times 1050 = 4271000 \text{ kgcm}$$

adică la distanţele x' şi x'' date de relaţiile

$$x' (l - x') = \frac{M' l^2}{4 M} = \frac{4841 \times 9.4^2}{4 \times 9630} = 11{,}10$$

$$x''(l - x'') = \quad = \frac{4271 \times 9.4^2}{4 \times 9630} = 10{,}83$$

care prin încercări ne duce la soluţiile

$x' = 1{,}39$ m $\qquad 1{,}39 \times 8{,}01 = 11{,}10$

$x'' = 1{,}31$ m $\qquad 1{,}31 \times 8{,}06 = 10{,}83$

Se recomandă ca rostul unde se întrerupe platbanda să se deplaseze cu o jumătate din laţimea platbandei, adică 20 cm, deci să avem distanţele 1,03 m respectiv 0,96 m Este deasemenea recomandat ca să se teşească platbanda mai groasă. Distanţele fiind mici, este de examinat, dacă prin aceasta avem o economie de material.

Pentru a asigura secţia şi solidarizarea platbandelor cu inima, vom suda inima prin patru suduri. Grosimea sudurilor este dată de grosimea inimii şi va fi

$$a = \frac{15\sqrt{2}}{2} = 10{,}5 \text{ mm}$$

alegând o lungime b, suprafaţa în care rezistă sudura este $2ab$, iar rezistenţa care intră în joc este lunecarea longitudinală

$$\tau = \frac{TS}{\delta I}$$

In suprafaţa ce desparte inima de platbande, pe lăţimea δ adică grosimea inimii şi o lungime e, distanţa între suduri, va lucra o forţă $\tau e \delta$, care trebue luată de sudura ce o facem $\tau_a 2ab$, în care rezistenţa admisibilă a sudurii se ia

$$\tau_a = 0{,}65\ \sigma_a = 0{,}65 \times 1400 = 910 \text{ kg/cm}^2$$

Vom avea deci

$$\tau e \delta = e \frac{TS}{I} = \tau_a\, 2\, ab$$

deci distanţa între suduri este

$$e = \frac{I}{TS} \tau_a\, 2\, ab = \frac{140500 \times 910 \times 2 \times 1{,}05 \times 6}{39950 \times 1440} = 29 \text{ cm}$$

în care am luat $b = 6$ cm iar

$$S = 40 \times 1\,(35{,}5 + 0{,}5) = 1440 \text{ cm}^3$$

Pentru siguranţă se vor putea completa şi spaţiile între cordoanele de sudură cu o sudură mai slabă. Către mijlocul grinzii distanta între suduri creşte, căci forţa tăietoare scade.

Scanned with OKEN Scanner

Şi inima nu putem s'o facem dintr'o bucată şi va trebui [să o îmbinăm. Să luăm două rosturi verticale, la distanţa 2,70 m dela reazeme. In această secţie avem:

$$M = \frac{px}{2}(l-x) = \frac{3500}{2}2{,}7 \times 6{,}7 = 76900 \text{ kgm}$$

$$T = p\left(\frac{l}{2} - x\right) = 8500\,(4{,}7 - 2{,}7) = 17000 \text{ kg}$$

Rezistenţele ce se produc în sudura inimii sunt de două feluri: tangenţiale, produse de forţa tăietoare T şi normale, produse de momentul încovoietor M. In punctul cel mai depărtat de axa neutră, la distanţa 35,5 cm, ele sunt

$$\tau = \frac{TS}{bI} = \frac{17000 \times 2920}{1{,}5 \times 257953} = 128{,}3 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{7690000 \times 35{,}5}{257953} = 1058 \text{ kg/cm}^2$$

care se vor compune după regula

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma' = \frac{1058}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1058^2 + 4 \times 128^2} = 1058 \text{ kg/cm}^2$$

pe când rezistenţa admisibilă, în partea întinsă, este $\sigma_a = 0{,}75 \times 1400 = 1050$ kg/cm². Locul îmbinării este deci bine ales.

c) *Calculul unei grinzi de lemn cu pene.* Să luăm o grindă de deschidere $l = 8$ m, încărcată cu două sarcini $P = 2000$ kg simetrice la distanţa de 2 m.

$$M_{max} = 2000 \times 300 = 600000 \text{ kgcm.}$$

$$T_{max} = 2000 \text{ kg}$$

$$W_{nec} = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{600000}{80} = 7500 \text{ cm}^3$$

Vom alege două grinzi 20 × 25 cm, şi fiindcă le legăm cu buloane

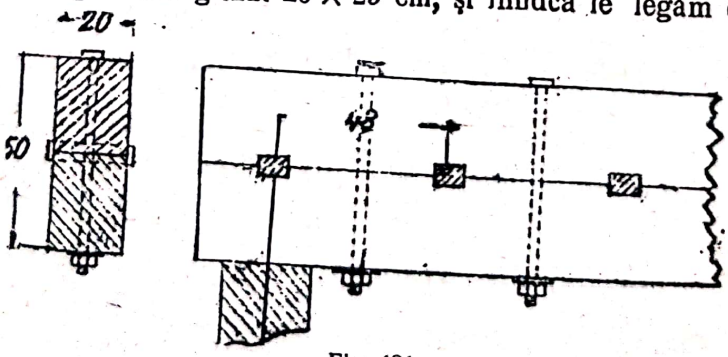


Fig. 134

se pierde 2 cm aşa că avem

$$I = \frac{b\,(2\,h)^3}{12} = \frac{18 \times 50^3}{12} = 187500 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{187500}{25} = 7500 \text{ cm}^3$$

Pentru a împiedeca lunecarea longitudinală se pun pene de 4 cm (fig. 134) Rezistenţa ce se introduce pe suprafaţa penei este

$$R = 2 \times 20 \times 80 = 3200 \text{ kg.}$$

care trebue să dea

$$R = \tau\, b\, e = \frac{T S}{I} e$$

de unde calculăm distanţa între pene

$$e = \frac{I R}{T S} = \frac{187500 \times 3200}{2000 \times 6250} = 48 \text{ cm}$$

în care $S = 20 \times 25 \times 12{,}5 = 6250$ cm³.

81. Grinzi de egală rezistenţă la încovoiere. Rezistenţa în o secţie este maximă în punctul cel mai depărtat de axa neutră şi este

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}$$

Putem să facem să varieze W, aşa în cât rezistenţa să fie aceeaşi or-care ar fi M. Obţinem atunci o grindă de egală rezistenţă.

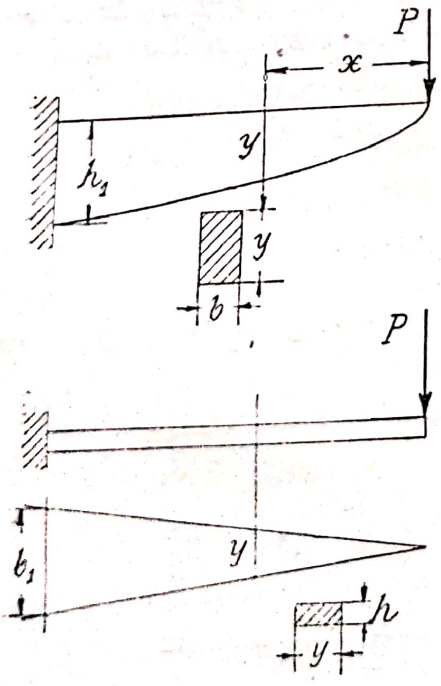


Fig. 135

Să luăm o grindă înţepenită, cu secţie dreptunghiulară şi încărcată la capăt cu o forţă P. (fig. 135)

Avem

$$M_x = Px$$

$$W = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{1}{6} b y^2$$

de unde scoatem

$$y^2 = \frac{6\,Px}{b\,\sigma_a}$$

adică o parabolă. Grosimea la înţepenire va fi

$$h_1 = \sqrt{\frac{6\,Pl}{b\sigma_a}}$$

Dacă admitem înălţimea constantă h şi variem lăţimea obţinem

$$W = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{1}{6} y h^2$$

de unde

$$y = \frac{6P}{h^2 \sigma_a} x$$

adică o linie dreaptă. Grosimea la înțepenire va fi

$$b_1 = \frac{6Pl}{h^2 \sigma_a}$$

este forma pe care o iau arcurile făcute din foi de grosime constantă.

Să luăm grinda încărcată cu o sarcină uniform distribuită și rezemată pe două reazeme.

$$M_x = \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2}$$

și vom avea

$$W = \frac{1}{6} b y^2 = \frac{plx - px^2}{2\sigma_a}$$

aceasta este ecuația unei elipse. Înălțimea maximă va avea loc la mijloc de unde

$$h = \sqrt{\frac{3pl^2}{4b\sigma_a}}$$

Se poate astfel determina forma de egală rezistență pentru oricare grindă după încărcare.

Exemplu. Un vagon de marfă greutate proprie 10 t, și încărcarea de 15 t, este rezemat pe patru arcuri.

Revine deci la un arc 2,5 t. gol și 6,25 t. încărcat.

Arcul se face din foi, de secție dreptunghiulară pentru care alegem dimensiile 100 × 13 mm., prevăzute la mijloc cu o nervură pentru ca să nu alunece lateral.

Secția se face variabilă după o parabolă mărind numărul de foi că-

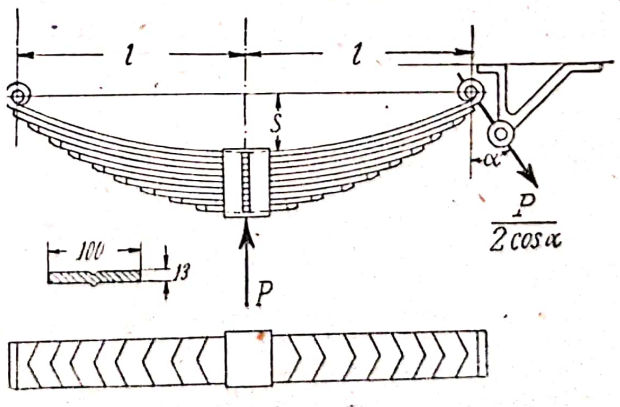


Fig. 136

tre mijloc. Prima foaie prezintă un ochiu prin care se face legătura arcului cu cadrul vagonului aşa cum se vede în figură (fig. 136).

Vom avea

$$M = \frac{P}{2\cos\alpha}(s\sin\alpha + l\cos\alpha) = \frac{P}{2}(l + s\,\mathrm{tg}\,\alpha)$$

de nnde

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{P(l + s\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{2n\frac{bh^2}{6}}$$

de oarece avem n foi, fie care rezistând pentru sine.

Vom alege după normele Uniunii căilor ferate $2l = 1000$ mm, $s = 110$, Pentru ca foile să poată fi mereu în contact ele se îndoaie după un cerc şi raza acestui cerc este

$$R = \frac{l^2 + s^2}{2s} = \frac{500^2 + 110^2}{2 \times 110} = 1187 \text{ mm.}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{l}{R - s} = \frac{500}{1187 - 1077} = 0{,}464$$

Modulul de rezistenţă al unei foi fiind

$$W = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}10 \times 1{,}3^2 = 2{,}81 \text{ cm}^2$$

alegând 10 foi vom avea rezistenţa

$$\sigma = \frac{6250\,(50 + 11 \times 0{,}464)}{2 \times 10 \times 2{,}81} = 6127 \text{ kg./cm}^2$$

cum oţelul de rezoarte este cel mai bun putând suporta rezistenţele între 6000 — 6500 kg/cm²., suntem în limitele admisibile.

82. **Calculul secţiilor neomogene.** Tot după teoria încovoierii procedăm în cazul secţiilor neomogene, adică în care materialul nu arată aceleaşi proprietăţi la tensiune şi la compresiune.

In acest caz vom păstra tot ipoteza că secţia plană rămâne plană şi după deformaţie, adică lungirile sunt proporţionale cu distanţa la axa neutră. Dar rezistenţele nu mai variază după aceeaşi lege ci avem după coeficienţii de elasticitate diferiţi la tensiune şi la compresiune

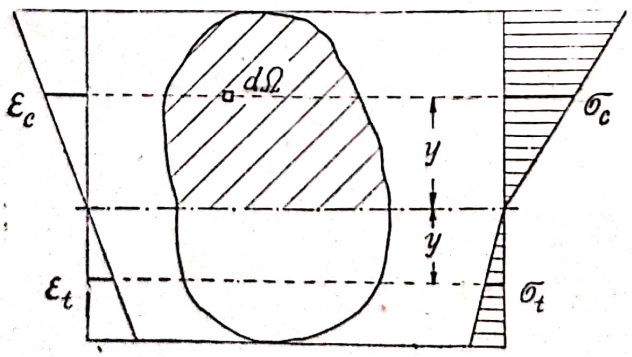


Fig. 137

$$\sigma_t = E_t\,\varepsilon_t$$

$$\sigma_c = E_c\,\varepsilon_c$$

după cum ştim de la încovoere (nr. 36) avem

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

şi deci putem scrie

$$\sigma_t = E_t \frac{y}{\rho} \quad , \quad \sigma_c = E_c \frac{y}{\rho}$$

care ne duc la ecuaţiile de echilibru pentru proecţii şi momente

$$\int \sigma \, d\Omega = \frac{E_t}{\rho} \int_t y \, d\Omega + \frac{E_c}{\rho} \int_c y \, d\Omega = 0$$

$$\int \sigma \, y \, d\Omega = \frac{E_t}{\rho} \int_t y^2 \, d\Omega + \int_c y^2 \, d\Omega = M$$

în care am presupus că nu avem decât moment încovoietor, iar integralele se referă la partea comprimată şi la partea întinsă.

Dacă se notează raportul $E_t : E_c = n$, atunci vom putea scrie

$$\frac{E_c}{\rho} (S_c + n S_t) = 0$$

$$\frac{E_c}{\rho} (I_c + n I_t) = M$$

putem zice că prima expresie ne dă momentul static al unei suprafeţe ideale, în care am înmulţit cu n partea supusă la întindere. Axa neutră trece deci prin centrul de greutate al acestei secţii ideale, căci momentul static devine nul, $S_i = 0$.

De asemenea a doua relaţie conţine momentul de inerţie ideal, al secţiei în care am înmulţit cu n partea supusă la întindere, moment luat în raport cu axa neutră, aşa că putem scrie

$$\sigma_t = E_t \frac{y}{\rho} = \frac{E_t}{E_c} \frac{M y}{I_c + n I_t} = n \frac{M y}{I_i}$$

$$\sigma_c = E_c \frac{y}{\rho} = \frac{M y}{I_c + n I_t} = \frac{M y}{I_i}$$

şi am revenit ast-fel la formula lui Navier, însă rezistenţa în partea supusă la tensiune este de n ori mai mare.

Calculul acesta se aplică la secţiile de beton armat, secţii neomogene formate din beton şi fier. De obiceiu se neglijează rezistenţa la tensiune a betonului care este prea mică faţă de acea a fierului, aşa că repartiţia rezistenţelor în secţie este aceea din figură (fig. 138).

Scanned with OKEN Scanner

Axa neutră este dată de condiţia ca momentul static ideal să fie nul.

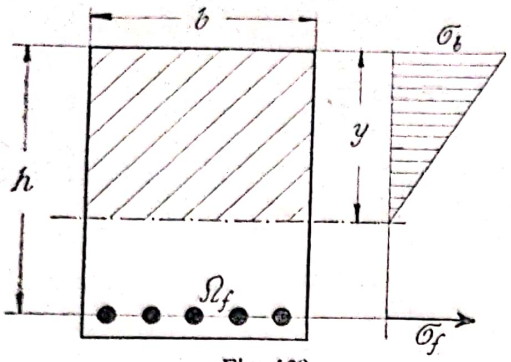


Fig. 138

$$S_i = b\,y\,\frac{y}{2} - n\,\Omega_f\,(h-y) = 0$$

de unde aflăm poziţia axei neutre

$$y = \frac{n\,\Omega_f}{b}\left[-1+\sqrt{1+\frac{2\,b\,h}{n\,\Omega_f}}\right]$$

iar momentul de inerţie ideal

$$I_i = \frac{1}{3}\,b\,y^3 + n\,\Omega_f\,(h-y)^2 = n\,\Omega_f\,(h-y)\left(h-\frac{y}{3}\right) = \frac{b\,y^2}{2}\left(h-\frac{y}{3}\right)$$

aşa că rezistenţele maxime, notate în figură pentru beton şi pentru fier vor fi

$$\sigma_b = \frac{M\,y}{I_i} = \frac{2\,M}{b\,y\left(h-\frac{y}{3}\right)}$$

$$\sigma_f = \frac{n\,M(h-y)}{I_i} = \frac{M}{\Omega_f\left(h-\frac{y}{3}\right)}$$

formule cu care se calculează plăcile de beton armat. Pentru n se ia în acest caz valoarea $n = 15$.

Exemplu. Să calculăm o placă de beton armat care formează tavanul unei camere de 4,00 m lăţime şi suportă o sarcină de 350 kg/m². Vom avea pentru momentul încovoietor pentru o lăţime de 1 m, $b = 100$ cm

$$M = \frac{350 \times 4 \times 400}{4} = 70\,000 \text{ kgcm}$$

Alegem $h = 10$ cm, şi pentru armătura de fier $\Omega_f = 8\ \Phi\ 11 = 7{,}60$ cm² şi vom avea după formulele stabilite

$$y = \frac{15 \times 7{,}60}{100}\left[-1+\sqrt{1+\frac{2 \times 100 \times 10}{15 \times 7{,}60}}\right] = 3{,}77 \text{ cm}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \times 70\,000}{100 \times 3{,}77\ (10-1{,}25)} = 42.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_f = \frac{70\,000}{7{,}60\ (10-1{,}25)} = 1050 \text{ kg/cm}^2$$

Rezistenţele fiind în limite admisibile placa noastră este bine dimensionată.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru dimensionarea iute a plăcilor de beton se găsesc întocmite tabele ca e ne dau pentru diferite momente încovoietoare valoarea elementelor ce le căutăm.

83. **Critica teoriei încovoierii.** Pentru a stabili formulele de calcul la încovoiere am pornit dela ipoteza că secţiile rămân plane, ele rotindu-se în jurul axei neutre, ceiace ne-a dus la repartiţia liniară a rezistenţelor. Şi prin experienţele ce s'au făcut, s'a văzut că rezistenţele ce se nasc în o grindă nu sunt tocmai acelea cari sunt date de formula lui Navier, obţinându-se deosebiri ce nu se puteau explica şi care năşteau bănuiala că formula nu ar fi justă.

In special supunându-se bare la încovoiere se obţineau nişte valori pentru rezistenţa la rupere, pe când încercând probe din ace'aş material la întindere, se găseau alte valori, deşi încovoierea este tensiune combinată cu compresiune. Chiar în tabelele de rezistenţe admisibile se dau pentru acelaşi material rezistenţe diferite pentru întindere şi încovoiere, chiar la materialele omogene.

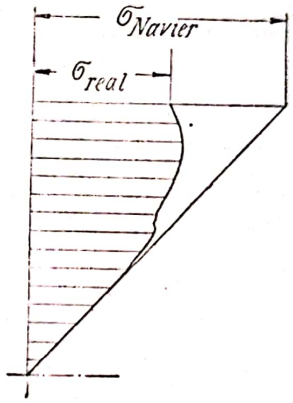


Fig. 139

Acest lucru însă se explică dacă ne amintim că repartiţia rezistenţelor la încovoiere este liniară, pe când deformaţiile nu variază liniar decât sub limita de proporţionalitate, iar până la rupere sunt date de curba caracteristică a materialului. Atunci când încărcăm grinda până la rupere, rezistenţa porneşte dela zero în axa neutră, până la valoarea maximă care este dată de linia dreaptă pentru formula lui Navier, pe când rezistenţa reală pe care o măsurăm este dată de variaţia lui σ după curba caracteristică a materialului, valoare care este totdeauna mai mică (fig. 139)

Pe lângă rezistenţele normale σ, mai apar şi rezistenţe tangenţiale τ, care variază dealungul secţiei producând astfel variaţia unghiurilor drepte şi strâmbarea secţiei, în fine pe lângă acestea mai apar şi alte rezistenţe normale pe secţiile longitudinale, pe care noi le-am neglijat.

Valoarea rezistenţelor normale σ, nu depinde numai de momentul de inerţie I, forma secţiei făcându-se simţită prin rezistenţele diferite prin care le obţinem prin măsurile elastice precise

ce se pot face. Dar nu putem să ţinem seama de toate aceste elemente cari ar îngreuia calculul.

Atât timp cât valoarea rezistenţelor rămâne sub limita de proporţionalitate, acestea vor fi liniar repartizate şi deci secţiile vor rămâne plane. Ori rezistenţele admisibile cu care lucrăm sunt sub această limită aşa că ipotezele ce am făcut sunt apropiate. Eventualele neglijări ce s'au făcut la stabilirea formulei, sunt acoperite deci de coeficientul de siguranţă cu care lucrăm.

Infine teoria exactă a încovoierii arată că rezistenţele se repartizează în corp după cum ne arată formulele numai la o anumită distanţă de punctul de aplicare al forţei, mai cu seamă în cazul reazemelor şi forţelor concentrate. Căci formula lui Navier reprezintă acţiunea unui moment încovoietor, şi repartiţia rezistenţelor datorite acestui moment este practic independentă de cauzele exterioare ce produc momentul, când secţia transversală a piesei este mică în raport cu lungimea. Nu vom putea deci calcula piese prea scurte faţă cu secţia transversală.

Scanned with OKEN Scanner

Cap. VIII. Deformaţia grinzilor drepte.

84. Deformaţiile elementare. Sub acţiunea momentului încovoietor şi a forţei tăietoare se produc deformaţii, deplasarea a două secţii vecine, care se transmite din o secţie în alta a grinzii. Vom porni de la deformaţiile elementare produse asupra unui element de grindă dx, de acţiunea momentului încovoietor şi a forţei tăietoare separate.

a) Deformaţia datorită momentului încovoietor am examinat'o la încovoiere. Secţia *II* se va roti faţă de secţia *I*, iar deformaţia este variaţia unghiului $\Delta\varphi$.

$$\Delta\varphi = \frac{dx}{\rho} = \frac{M dx}{EI}$$

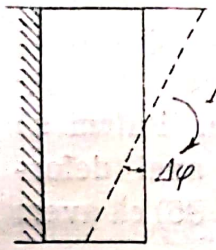


Fig. 140

pentru a afla unghiul produs între două secţii oare-care, vom putea aduna variaţia unghiului $\Delta\varphi$ pe distanţa între aceste două secţii şi vom avea

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M dx}{EI}$$

b) Deformaţia datorită forţei tăietoare o vom deduce din rezistenţele de lunecare τ, care după legea lui Hooke ne dau

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

dar cum τ nu mai este uniform distribuită pe secţie, rezultă că şi γ va varia dealungul secţiei.

Vom admite atunci că avem o lunecare medie γ_m, corespunzătoare rezistenţelor uniform distribuite, şi să lunecarea adevărată γ este dată de

$$\gamma = k\ \gamma_m$$

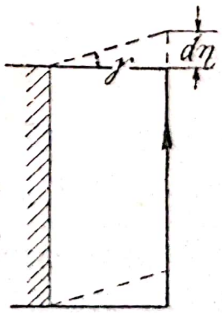


Fig. 141

k fiind numit *coeficient de repartiţie.* Pentru a afla acest coeficient scrim că lucrul mecanic de deformaţie produs de γ, este egal cu lucrul mecanic produs de τ, adică

$$\frac{1}{2} T \gamma = \frac{1}{2} T k \gamma_m = \int \frac{\tau^2}{2G} d\Omega$$

în care

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} = \frac{T}{G\Omega}$$

şi de aci vom scoate

$$k = \frac{\Omega}{T^2} \int \tau^2 d\Omega$$

cu această relaţie vom putea calcula pe k şi vom avea ca deplasare a secţiei

$$d\eta = \frac{k T}{G\Omega} dx$$

şi dacă vrem să aflăm deplasarea prin lunecare între două secţii vom face suma

$$\eta_2 - \eta_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{k T}{G\Omega} dx$$

85. Ecuaţia diferenţială a axei deformate. Putem să exprimăm deformaţia şi căutând care este forma axei deformate. Am stabilit la studiul încovoierii (Cap. III, nr. 36) că avem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

care este ecuaţia diferenţială a axei deformate şi care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{T}{EI}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{p}{EI}$$

In ecuaţia diferenţială de mai sus M este momentul variabil cu secţia x, iar curba deformată este raportată la cele două axe, Ox, chiar axa bucăţii, Oy axa verticală. Pentru a

obține pentru un moment pozitiv ordonate pozitive trebue ca să avem y'' negativ adică să luăm semnele

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

Ordonatele curbei reprezintă lăsarea grinzii sau *săgeata* în acel punct. Ne interesează în special săgeata maximă.

Vom determina ecuațiile axei deformate și săgețile maxime pentru grinzile cunoscute.

a) Grinda înțepenită. Să luăm grinda înțepenită cu o sarcină concentrată la capăt. Față de axele din figură avem

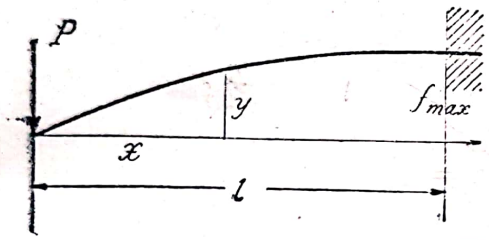


Fig. 142

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_x = Px$$

Integrând de două ori

$$EI\frac{dy}{dx} = P\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EIy = P\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

Pentru determinarea constantelor punem condițiile pentru $x = 0$, $y = 0$ și pentru $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$ ceea ce ne dă

$$C_2 = 0 \quad , \quad C_1 = -P\frac{l^2}{2}$$

adică ecuația devine

$$y = -\frac{Px}{EI}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right)$$

Săgeata maximă este atunci la înțepenire și anume pentru $x = l$

$$f_{max} = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

Câte odată este necesară și tangenta la capăt. Aceasta este valoarea lui $\frac{dy}{dx}$ pentru $x = 0$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{Pl^2}{2EI}$$

Să luăm grinda încărcată cu o sarcină uniform distribuită:

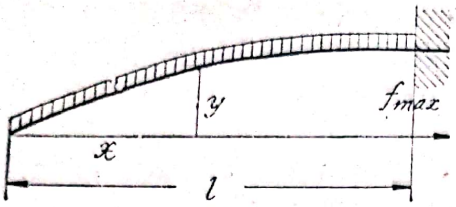


Fig. 143

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{x^2}{2}$$

şi integrând de două ori

$$EI\frac{dy}{dx}=p\frac{x^3}{6}+C_1$$

$$EIy=\frac{px^4}{24}+C_1x+C_2$$

Pentru determinarea constantelor avem aceleaşi condiţii care ne dau

$$C_2=0 \quad , \quad C_1=-\frac{pl^3}{6}$$

adică ecuaţia devine

$$y=-\frac{px}{6EI}\left(l^3-\frac{x^3}{4}\right)$$

Săgeata maximă are loc pentru $x=l$, adică

$$f_{max}=-\frac{pl^4}{8EI}$$

b) Grinda rezemată. Să luăm o sarcină concentrată P aplicată într'un punct oarecare al grinzii. Vom avea două curbe deformate, corespunzătoare celor două bucăţi de grindă în care momentele variază după două legi diferite şi care se racordează în dreptul sarcinei. Scriind separat pentru fiecare din cele două bucăţi, vom avea

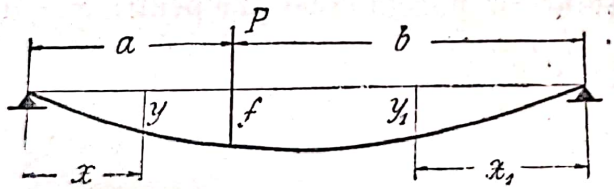


Fig. 144

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M_x=-\frac{Pb}{l}x$$

$$EI\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=-M_{x_1}=-\frac{Pa}{l}x_1$$

integrând de două ori vom obţine

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{Pb}{l}\frac{x^2}{2}+C$$

$$EI\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{Pa}{l}\frac{x_1^2}{2}+C_1$$

$$EIy = -\frac{Pb}{l}\frac{x^3}{6} + Cx + C'$$

$$EIy_1 = -\frac{Pa}{l}\frac{x_1^3}{6} + C_1 x_1 + C'_1$$

pentru a determina cele patru constante de integrare vom scrie patru condiții, două pe reazem, și alte două că ambele ramuri se racordează în punctul încărcat cu sarcina. Vom avea

$$C' = 0 \quad , \quad C_1' = 0$$

$$-\frac{Pb}{l}\frac{a^3}{6} + Ca = -\frac{Pa}{l}\frac{b^3}{6} - C_1 b$$

$$-\frac{Pb}{l}\frac{a^2}{2} + C = +\frac{Pa}{l}\frac{b^2}{2} - C_1$$

ceea ce ne dă

$$C = \frac{Pab}{6l}\left(2b + a\right)$$

$$C_1 = \frac{Pab}{6l}\left(2a + b\right)$$

care ne duce la ecuațiile

$$y = \frac{Pb}{6EIl}\left[a(2b + a)x - x^3\right]$$

$$y_1 = \frac{Pa}{6EIl}\left[b(2a + b)x_1 - x_1^3\right]$$

săgeata comună în punctul C este

$$f = \frac{Pb^2a^2}{3EIl}$$

Săgeata maximă se găsește în bucata cea mai lungă, și are loc unde tangenta e orizontală adică pentru

$$x_1 = \sqrt{\frac{(2a + b)b}{3}}$$

Când sarcina este în mijlocul grinzii, $a = b = l/2$ și săgeata maximă are loc în secția din mijloc $x_1 = 0{,}5\,l$. Când sarcina este în poziție extremă $a = 0$, găsim $x_1 = b/3 = 0{,}577\,l$.

Deci ori ce poziţie va avea sarcina, maximul săgeţii se găseşte în apropierea mijlocului, la distanţa 0,577 l. Nu greşim mult dacă luăm săgeata maximă chiar în mijloc, căci în jurul maximului variaţiile sunt mici. Valoarea este

$$f_{max} = \frac{P a (3 l^2 - 4 a^2)}{48 E I}$$

Infine pentru cazul când sarcina P este la mijloc, săgeata maximă este în mijloc şi avem

$$f_{max} = \frac{P l^3}{48 E I}$$

Să luăm grinda încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Vom avea

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = + \frac{p x^2}{2} - \frac{p l x}{2}$$

şi integrând de două ori

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{p x^3}{6} - \frac{p l x^2}{4} + C_1$$

$$EIy = \frac{p x^4}{24} - \frac{p l x^3}{12} + C_1 x + C_2$$

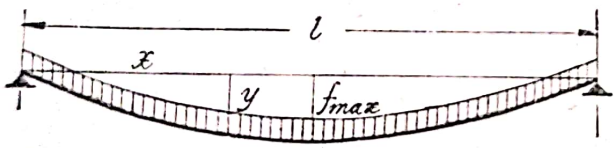


Fig. 145

pentru determinarea constantelor vom scrie că pe reazem pentru $x = 0$ avem $y = 0$, şi din cauza simetriei tangenta la mijloc $x = \frac{l}{2}$ este orizontală. Găsim atunci

$$C_2 = 0 \quad , \quad C_1 = \frac{p l^3}{24}$$

ceea ce ne dă ecuaţia

$$y = \frac{p}{24 EI} (x^4 - 2 l x^3 + l^3 x)$$

iar săgeata maximă este

$$f_{max} = \frac{5 p l^4}{384 EI}$$

86. **Săgeata produsă de lunecare.** In ecuaţia diferenţială a axei deformate nu am ţinut cont decât de momentul încovoietor. Dar şi lunecările produc o săgeată, care va fi

$$f = \int \gamma \, dx$$

această săgeată este însă mică aşa că de obicei se neglijează.

Să evaluăm pe un exemplu această săgeată. Luăm o grindă rezemată pe două reazeme şi încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Avem

$$f = \int_0^{\frac{l}{2}} k \gamma_m \, dx$$

Trebue deci să calculăm întâi coeficientul de repartiţie k

$$k = \frac{\Omega}{T^2} \int \tau^2 \, d\Omega$$

Pentru o secţie dreptunghiulară avem, înlocuind expresia cunoscută pentru τ

$$k = 2 \frac{\Omega}{T^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{T^2}{4 I^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)^2 b \, dy = = \frac{6}{5}$$

şi săgeata datorită lunecărilor va fi

$$f_{max} = \int_0^{\frac{l}{2}} k \frac{T}{G \Omega} \, dx = \frac{k}{G \Omega} \int_0^{\frac{l}{2}} p \left(\frac{l}{2} - x \right) dx$$

$$f_{max} = \frac{3}{20} \frac{p \, l^2}{G \Omega}$$

Astfel pentru o grindă de lemn $l = 4$ m, secţia 15/20 deci $\Omega = 300$. $I = 100$, $p = 400$ kg/ml, $E = 100.000$, $G = 38500$

$$f = \frac{3}{20} \frac{400 \times 4 \times 400^2}{38500 \times 300} = 0{,}0083 \text{ cm}$$

pe când săgeata produsă de momentul încovoietor ar fi

$$f = \frac{5\,pl^4}{384\,EI} = \frac{5 \times 400 \times 4 \times 400^3}{384 \times 100\,000 \times 1000} = 13{,}3 \text{ cm}$$

87. **Integrarea ecuaţiei diferenţiale a axei deformate.** Integrarea directă, ca mai sus, a ecuaţiei diferenţiale reuşeşte numai în cazuri simple. Pentru cazuri mai complicate vom stabili formule de integrare simbolice, dar mai simple.

Pornind de la ecuaţia

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

şi integrând odată, vom avea expresia tangentei, deci

$$\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}\varphi_o = -\int_o^x \frac{M}{EI}\,dx = -\Omega_x,$$

în care $\operatorname{tg}\varphi_o$ reprezintă tangenta în origină, constantă de integrare cunoscută. Membrul al doilea este suprafaţa dată de diagrama momentelor, cuprinsă între O şi x, pe care o notăm Ω_x.

Integrând a doua oară avem

$$y - y_o - x\,\operatorname{tg}\varphi_o = -\int_o^x \Omega_x\,dx$$

membrul al doilea se integrează prin părţi

$$\int_o^x \Omega_x\,dx = \left| x\Omega_x \right|_o^x - \int_o^x x\,d\Omega_x = x\Omega_x - \int_o^x \frac{M\,x\,dx}{EI}$$

în care integrala este momentul static al suprafeţei dată de diagrama momentelor, faţă cu verticala ce trece prin origină, deci se poate scrie

$$x\Omega_x - e_o\,\Omega_x = e_x\,\Omega_x = S_x$$

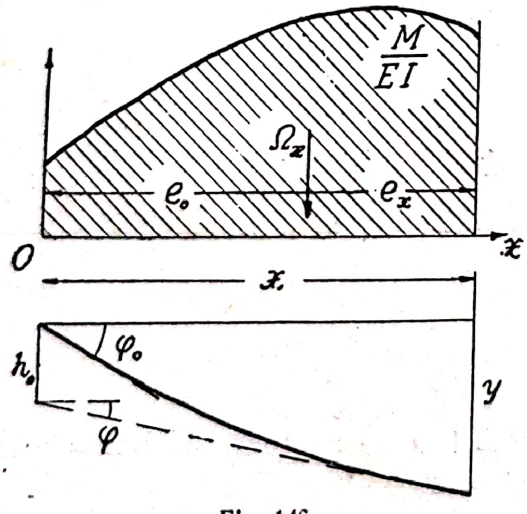


Fig. 146

având în vedere notaţiile din figură (fig. 146).

Vom avea deci

$$y - x\,\operatorname{tg}\varphi_o = -S_x$$

tangenta la axa deformată în x care face unghiul φ, taie pe verticala originii segmentul h_o şi avem

$$y = h_o + x\,\operatorname{tg}\varphi = h_o + x(\operatorname{tg}\varphi_o - \Omega_x)$$

și comparând cu cea de sus

$$h_o = x\,\Omega_x - S_x = x\,\Omega^x - e_x\,\Omega_x = e_o\,\Omega_x = S_o$$

Să aplicăm aceste relații la grinda rezemată pe două reazeme. Pentru o secție oarecare la distanțele x și x' avem două suprafețe Ω_x, Ω'_x, ale căror centre de greutate sunt la distanțele e_o, e_x, e'_o, e'_x. Avem deci (fig. 147)

$S_o = \Omega_x\, e_o$, $S_x = e_x\,\Omega_x$.

$S'_o = \Omega'_x e'_o$, $S'x = e'_x \Omega'_x$.

$h_A = S_o$, $h_B = S'_o$

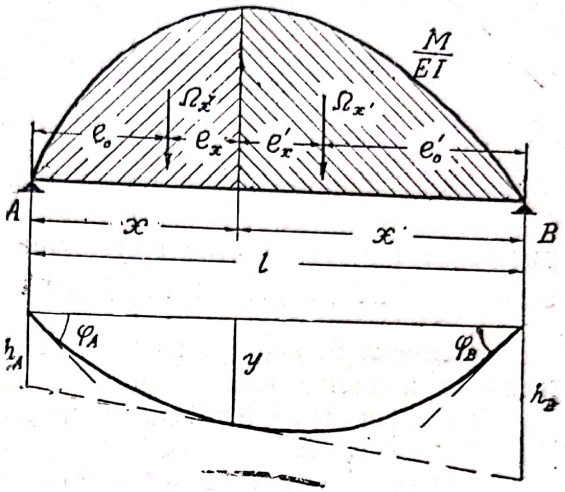


Fig. 147

$$y = \frac{h_A\,x'}{l} + \frac{h_B\,x}{l} = \frac{\Omega_x\,e_o\,x'}{l} + \frac{\Omega'_x\,e'_o\,x}{l}$$

expresie ce o putem scrie, înlocuind $e_o = x - e_x$

$$y = \frac{\Omega_x\,(x - e_x)\;x' + \Omega'_x\,e'_o\,x}{l} =$$

$$\frac{\Omega'_x\,e'_o\,x + \Omega_x\,(e_x + x')\,x - \Omega_x\,e_x\,(x + x')}{l}$$

$$= \frac{\Omega_x\,(e_x + x') + \Omega'_x\,e'_x}{l}\,x - \Omega_x\,e_x = \frac{\Omega e_B}{l}\,x - \Omega_x\,e_x$$

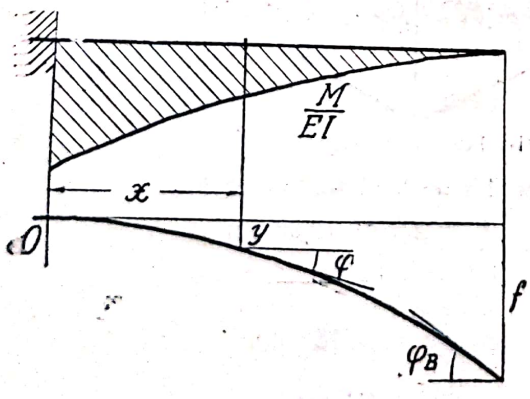


Fig. 148

apare deci săgeata sub forma momentului încovoietor în secția x, dat de încărcarea M/EI așezată pe grindă.

Tangentele pe reazeme sunt date de

$$\varphi_A = \frac{S_B}{l}\ ,\ \varphi_B = \frac{S_A}{l}$$

Pentru grinda înțepenită avem rezultate mai simple,

căci tangenta la înţepenire este cunoscută. Vom avea (fig. 148)

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_x = -\Omega_x$$

$$\varphi_B = -\Omega$$

$$y = -S_x$$

$$f = -S_B$$

putem deci privi săgeţile sub forma momentului încovoietor al sarcinei $M_i EI$ pe grinda înţepenită.

Exemplu. Să aflăm în acest mod săgeata grinzii din figură (fig. 149) încărcată cu sarcina dată.

Calculăm momentele încovoietoare

$$A = \frac{1}{6{,}20}(2 \times 4{,}9 + 5 \times 2{,}4 + 3 \times 1{,}4) = \frac{26}{6{,}2} = 4{,}2 \text{ t}$$

$$B = \frac{1}{6{,}20}(2 \times 1{,}3 + 5 \times 3{,}8 + 3 \times 4{,}8) = \frac{36}{6{,}2} = 5{,}8 \text{ t}$$

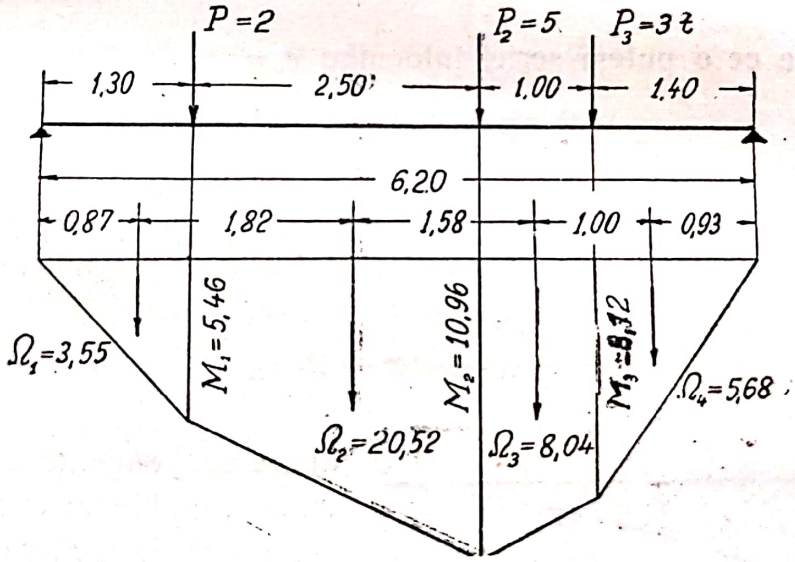


Fig. 149

$$M_1 = 4{,}2 \times 1{,}3 = 5{,}46 \text{ tm}$$

$$M_2 = 4{,}2 \times 3{,}8 - 2 \times 2{,}5 = 10{,}96 \text{ tm}$$

$$M_3 = 5{,}8 \times 1{,}4 = 8{,}12 \text{ tm}$$

$$W_{mec} = \frac{M_{max.}}{\sigma_a} = \frac{109600}{1400} = 780 \text{ cm}^3$$

aleg *I* 32, cu $I = 12500$ cm^4 şi deci factorul EI este

$$EI = 2 \times 10^6 \times 12{,}5 \times 10^3 = 25 \times 10^9 \text{ kg cm}^2 = 25 \times 10^2 \text{ tm}^2$$

Considerăm curba momentelor ca sarcină și vom avea deci sarcinile

$$\Omega_1 = \frac{5,46 \times 1,3}{2} = 3,55 \text{ tm}^2$$

$$\Omega_2 = \frac{5,46 + 10,96}{2} 2,50 = 20,52 \text{ tm}^2$$

$$\Omega_3 = \frac{10,96 + 8,12}{3} 1,0 = 8,04 \text{ tm}^2$$

$$\Omega_4 = \frac{8,12}{2} 1,4 = 5,68 \text{ tm}^2$$

Distanțele vor fi date de

$$\frac{2}{3} 1,3 = 0,87 \text{ m}$$

$$\frac{1}{3} 1,3 + \frac{2,5}{3} \frac{2 \times 10,96 + 5,46}{10,96 + 5,46} = 0,43 + 1,39 = 1,82 \text{ m}$$

$$\frac{2,5}{3} \frac{10,96 + 2 \times 5,46}{10,96 + 5,46} + \frac{1,0}{3} \frac{10,96 + 2 \times 8,12}{10,96 + 8,12} = 1,11 + 0,47 = 1,58 \text{ m}$$

$$\frac{1,0}{3} \frac{2 \times 10,96 + 8,12}{10,96 + 8,12} + \frac{1}{3} 1,40 = 0,53 + 0,47 = 1,00 \text{ m}$$

$$\frac{2}{3} 1,40 = 0,93 \text{ m}$$

verificare $0,87 + 1,82 + 1,58 + 1,00 + 0,93 = 6,20$ m.

Reacțiunile date de curba momentelor sunt

$$A' = \frac{1}{6,2} (3,55 \times 5,33 + 20,52 \times 3,51 + 8,04 \times 1,93 + 5,68 \times 0,93) =$$

$$= \frac{111,55}{6,2} = 18,0 \text{ tm}^2$$

$$B' = \frac{1}{6,2} (3,55 \times 0,87 + 20,52 \times 2,69 + 8,04 \times 4,27 + 5,68 \times 5,27) =$$

$$= \frac{122,88}{6,2} = 19,8 \text{ tm}^2$$

verificare $18,0 + 19,8 = 3,55 + 20,52 + 8,04 + 5,68$

Săgețile vor fi deci

$$EI\, y_1 = 18 \times 1,3 - 3,55 \times 0,43 = 21,87 \text{ tm}^3$$

$$EI\, y_2 = 18 \times 3,8 - 3,55 (1,82 + 1,11) - 20,52 \times 1,11 = 35,35 \text{ tm}^2$$

$$EI\, y_3 = 19,8 \times 1,4 - 5,68 \times 0,47 = 1,0 \text{ tm}^3$$

$$y_1 = \frac{21,87}{25} = 0,87 \text{ cm}$$

$$y_2 = \frac{35,35}{25} = 1,42 \text{ cm}$$

$$y_3 = \frac{1,0}{25} = 0,04 \text{ cm}$$

Scanned with OKEN Scanner

88. **Determinarea grafică a axei deformate.** Ecuaţia diferenţială a axei deformate

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

este tocmai ecuaţia curbei funiculare, în care membrul al doilea ar reprezenta sarcina. Putem deci reprezenta linia elastică prin poligonul funicular al forţelor elastice M/EI. Pentru aceasta vom calcula forţele elastice din suprafaţa diagramei momentelor, şi vom lua distanţa polară egală cu unitatea căci ecuaţia curbei funiculare este

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}$$

Forţele elastice sunt repartizate în figură prin fâşiile suprafeţei momentelor. Avem

$$\Delta\varphi = \frac{M\,dx}{E\,I}$$

adică tocmai variaţia unghiulară, care reprezintă rotaţia a două secţii.

Pentru a obţine săgeţile la o scară mai mare se alege de multe ori o distanţă polară mai mică.

Se poate alege $E\,I$ ca distanţă polară şi ca forţe elastice numai suprafeţele momentelor.

Această construcţie se foloseşte când secţia grinzii fiind variabilă alegem pentru fie care porţiune câte o distanţă polară $E\,I$.

In acest caz forţele elastice determinate în kgcm², se reprezintă la o scară oare-care, iar $H = E\,I$ tot în kgcm², se măsoară pe scara forţelor. Putem atunci să aflăm ordonatele axei deformate la scara ce dorim, mărindu-le foarte mult pentru a se citi cu înlesnire.

Ca exemplu să determinăm axa deformată şi să calculăm săgeata pentru grinda nituită de la nr. 80. Vom desena pe figură diagrama momentelor, cu ajutorul poligonu'ui funicular, în poziţia care am recunoscut că ne dă maximul Adăogăm de asemenea şi momentele produse de sarcina proprie.

Impărţim suprafaţa momentelor în şapte fâşii, corespunzătoare cu variaţia secţiei grinzii. Suprafeţele acestor fâşii reprezintă forţele elastice

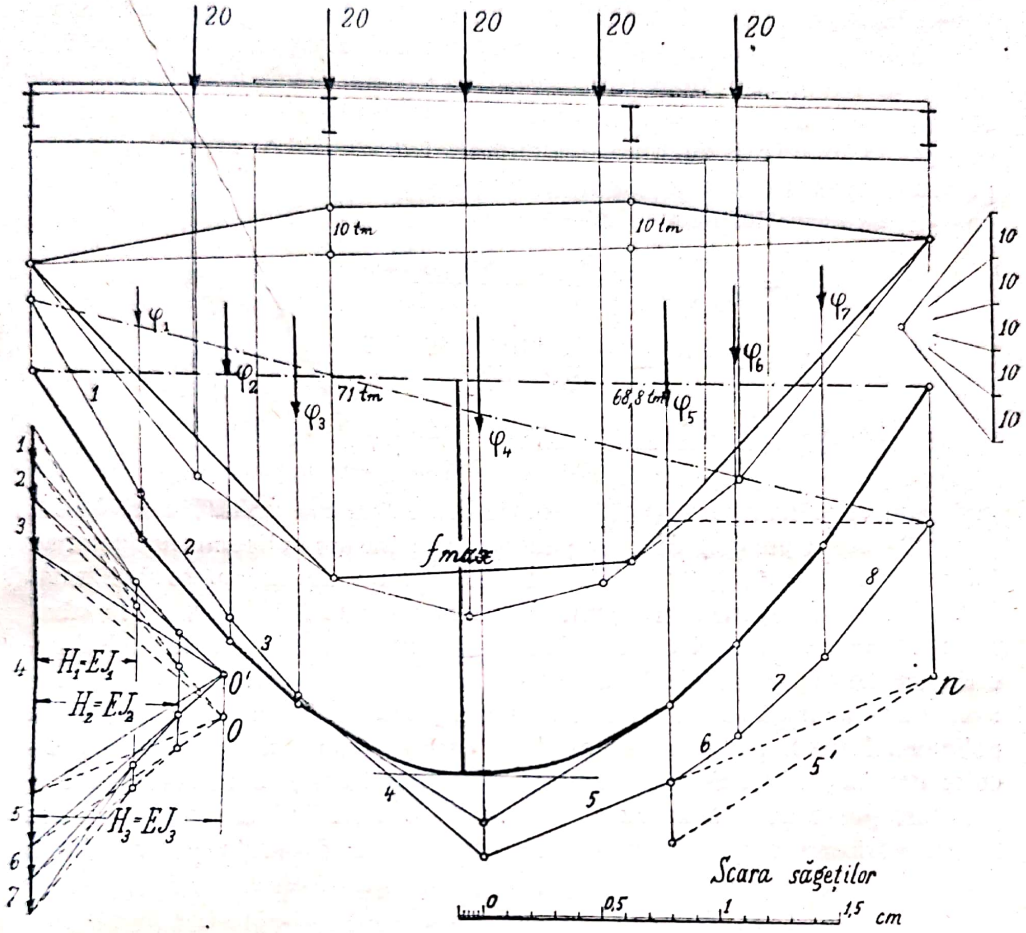


Fig. 150

şi sunt reprezentate în figură prin φ_1, φ_2, ... Calculul este aranjat mai jos

	M tm		h m	φ tm²
	0			
1		21,85	1,80	39,3
	43,7			
2		52,25	0,70	36,5
	60,8			
3		70,90	0,83	58,9
	81			
4		79,90	3,33	266,—
	78,8			
5		68,95	0,83	57,3
	59,1			
6		50,85	0,70	35,6
	42,6			
7		21,3	1,80	38,3
	0			531,9

Poligonul acestor forţe elastice se găseşte în figură reprezentat la scara 1 cm = 100 tm².

Pentru a trasa poligonul funicular, alegem trei distanţe polare, corespunzătoare celor trei secţii diferite ale grinzii. Alegem pentru $E = 2100$ t/cm², iar I este calculat şi exprimat în cm⁴. Cum deschiderea grinzii este desenată la scara 1 cm = 1 m adică de 100 ori mai mică, pentru a avea săgeţile în adevărata mărime trebue să le facem de 100 ori mai mari, şi pentru a avea o figură mai proporţionată le vom mări încă de 2,6 ori, ceea-ce pe scara forţelor ne dă 260 tm².

$$H_3 = \frac{E I_3}{100 \times 260} = \frac{2100 \times 264\,753}{100 \times 260 \times 100 \times 100} = 2{,}1 \text{ cm}$$

$$H_2 = \frac{E I_2}{100 \times 260} = \frac{2100 \times 201\,633}{100 \times 260 \times 100 \times 100} = 1{,}6 \text{ cm}$$

$$H_1 = \frac{E I_3}{100 \times 260} = \frac{2100 \times 141\,761}{100 \times 260 \times 100 \times 100} = 1{,}1 \text{ cm}$$

unde punem la numitor 100×100 pentru transformarea unităţilor cm² în m².

Cu acest poligon desenat punctat în 0, trasăm poligonul funicular cu faturile 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 obţinând însă o linie de închidere înclinată. Pentru a o aduce orizontală prelungim una din laturi 5 de ex. până când tae verticala reazemului în n. Ordonata măsurată de la linia de închidere, o ducem la noua linie de închidere pe care o dorim orizontală, şi vom avea noua latură 5', care trece tot prin n. Paralela la această latură în poligonul forţetor ne dă noul pol 0', cu care s'a construit poligonul funicular definitiv, racordându-se laturile şi obţinând astfel axa deformată.

Se poate determina axa deformată şi analitic, integrând pentru fiecare porţiune de grindă, calcul ce este bun ca exerciţiu pentru cititor.

Cap. IX. Grinzi drepte static nedeterminate.

89. Intrebuinţarea ecuaţiei de deformaţie. Am cercetat la grinda dreaptă numai cazurile când numărul reacţiunilor, adică ale reazemelor, era aşa încât ecuaţiile de echilibru din statică ne dădeau valoarea reacţiunilor. Nu am putut depăşi deci două reazeme. Dar putem să avem o grindă rezemată pe mai multe reazeme.

Reacţiunile ce se vor naşte în aceste reazeme, fiind mai multe de cât numărul de ecuaţii de echilibru din statică, nu vor putea fi aflate pe această cale. Zicem că reacţiunile sunt *static nedeterminate*.

Cu cât numărul reazemelor creşte, şi cu el al necunoscutelor, *gradul de nedeterminare* este mai ridicat. Vorbim deci de grinzi *simplu, dublu, triplu static nedeterminate*, după numărul necunoscutelor cari apar faţă de sistemul simplu, static determinat cunoscut.

Sistemul de ecuaţii de echilibru din statică este nedeterminat, căci avem mai multe necunoscute de cât ecuaţii. Dar grinda noastră nu este în cazul corpurilor rigide din statică, ea se deformează. Deformaţia ei este hotărâtă de forma geometrică, de natura materialului, de forţele ce lucrează. Dacă deci cunoaştem deformaţia ce trebue să ia grinda noastră, avem noi condiţii, care adăogate pe lângă cele din statică, ne vor permite să aflăm necunoscutele.

Dacă considerăm o bucată oarecare dintr'o grindă, separată prin secţiile A, B, vom avea (fig. 151) în acele secţii câte un moment încovoietor şi o forţă tăietoare M_A, T_A, M_B, T_B, deci patru necunoscute.

Intre acestea avem ecuaţiile de echilibru

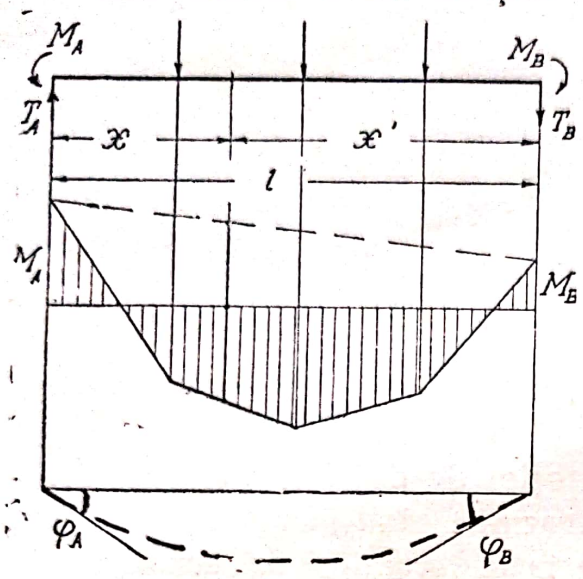


Fig. 151

$$T_A - T_B = \Sigma P = 0$$

$$M_A - M_B - T_A l + \Sigma M = 0$$

deci ne rămân două necunoscute static nedeterminate.

Sub acţiunea momentului încovoietor grinda se deformează. Acest moment încovoietor într'o secţie x este

$$M_x = T_A x - M_A - \Sigma M$$

în care înlocuind pe T_A prin valoarea scoasă din a doua ecuaţie de echilibru avem

$$M_x = \left(\frac{M_A - M_B}{l} + A_o\right) x - M_A - \Sigma M$$

ori $A_o x - \Sigma M = M_o$, adică momentul încovoietor într'o grindă rezemată, static determinată. Deci scriem

$$M_x = M_o - M_B \frac{x}{l} - M_A\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

lucru care se vede şi în diagrama momentelor.

Deformaţia grinzii o scrim

$$EI\,\varphi_A = \frac{S_B}{l} = \frac{1}{l}\left(S_{oB} - \frac{M_A + M_B}{2}\, l\, \frac{2M_A + M_B}{M_A + M_B}\, \frac{l}{3}\right)$$

$$EI\,\varphi_B = \frac{S_A}{l} = \frac{1}{l}\left(S_{oA} - \frac{M_A + M_B}{2}\, l\, \frac{M_A + 2M_B}{M_A + M_B}\, \frac{l}{3}\right)$$

în care S_{oA}, S_{oB} sunt momentele în raport cu reazemele ale suprafeţei momentelor static cunoscute.

Avem deci două relaţii

$$\varphi_A + \frac{1}{3EI} M_A + \frac{1}{6EI} M_B = \frac{S_{oB}}{l}$$

$$\varphi_B + \frac{1}{6EI} M_A + \frac{1}{3EI} M_B = \frac{S_{oA}}{l}$$

care adăogate la celelalte două cunoscute din statică ne determină complect necunoscutele noastre.

Scanned with OKEN Scanner

80. **Grinda continuă.** Când grinda dreaptă este rezemată pe mai multe reazeme, pe care noi le vom considera de nivel, se numeşte grindă continuă. Cum numai grinda pe două reazeme este static determinată, numărul de reazeme ce trece peste două, ne vor da reacţiuni static nedeterminate.

Vom considera două deschideri vecine, l_1 şi l_2 separându-le de restul grinzii. Va trebui deci să introducem momentele în

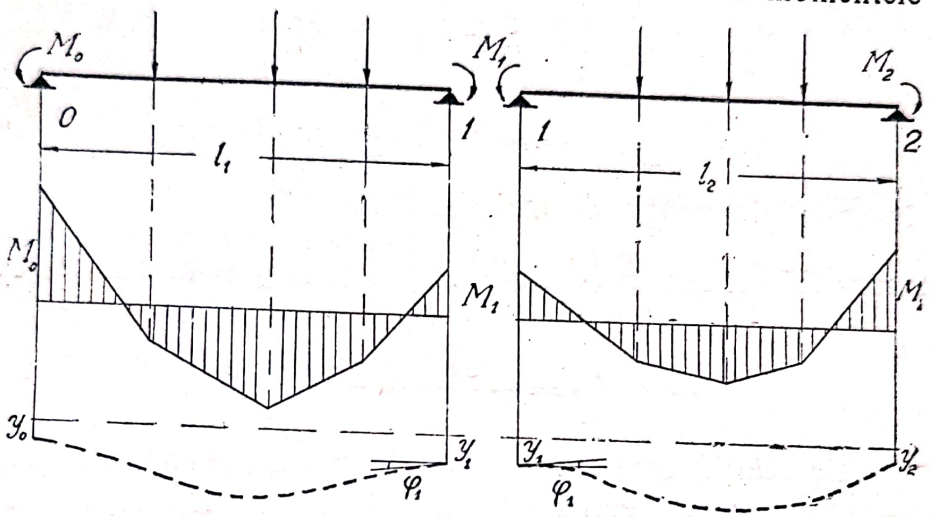


Fig. 152

aceste secţii de separare, care se numesc în acest caz *momente pe reazeme*, şi care sunt necunoscute.

Ecuaţia de deformaţie ne dă (fig. 152)

$$y_0 - y_1 - l_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = -S_{1,A}$$

$$y_2 - y_1 - l_2 \operatorname{tg} \varphi_1 = -S_{2,B}$$

în care am luat săgeţile odată în reazemul 0 şi a doua oară în reazemul 2.

Condiţia de continuitate a grinzii cere ca pe reazemul din mijloc să găsim aceiaşi tangentă. Eliminând deci pe φ_1 vom găsi

$$\frac{y_0 - y_1}{l_1} - \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{S_{1,A}}{l_1}, \quad \frac{y_2 - y_1}{l_2} - \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{S_{2,B}}{l_2}$$

$$\frac{y_0 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_1}{l_2} = -\frac{S_{1,A}}{l_1} - \frac{S_{2,B}}{l_2}$$

Exprimăm momentele statice ale suprafeţei momentelor, în funcţie de sarcina dată, cunoscută, şi de momentele pe

Scanned with OKEN Scanner

reazeme M_0. M_1, M_2. Vom avea

$$S_{1,A} = \frac{1}{EI_1}\left(S^0_{1,A} + \frac{M_0 + M_1}{2} l_1 \frac{M_0 + 2M_1}{M_0 + M_1}\frac{l_1}{3}\right)$$

$$S_{2,B} = \frac{1}{EI_2}\left(S^0_{2,B} + \frac{M_1 + M_2}{2} l_2 \frac{2M_1 + M_2}{M_1 + M_2}\frac{l_2}{3}\right)$$

de unde

$$S_{1,A} = \frac{1}{EI_1}\left(S^0_{1,A} + M_0 \frac{l_1^2}{6} + M_1 \frac{l_1^2}{3}\right)$$

$$S_{2,B} = \frac{1}{EI_2}\left(S^0_{2,B} + M_1 \frac{l_2^2}{3} + M_2 \frac{l_2^2}{6}\right)$$

şi înlocuind în relaţia de mai sus avem

$$\frac{6E(y_0 - y_1)}{l_1} + \frac{6E(y_2 - y_1)}{l_2} + M_0\frac{l_1}{I_1} + 2M_1\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) + M_2\frac{l_2}{I_2} = -\frac{6S^0_{1,A}}{l_1} - \frac{6S^0_{2,B}}{l_2}$$

Este relaţia care leagă între ele trei momente pe reazeme consecutive, numită ecuaţia lui *Clapeyron*. In caz când reazemele sunt rigide, adică $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ iar grinda de secţie constantă $I_1 = I_2 = I$ avem

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -\frac{6S^0_{1,A}}{l_1} - \frac{6S^0_{2,B}}{l_2}$$

Momentele statice ce apar în formulă se pot scrie foarte uşor pentru cazul sarcinei concentrate şi uniform distribuite. Avem după figură (fig. 153).

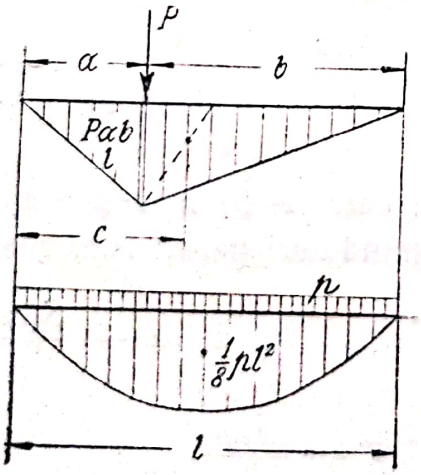


Fig. 153

$$S^0_{1,A} = \frac{Pab}{l}\frac{l}{2}\left[a + \frac{2}{3}\left(\frac{l}{2} - a\right)\right] = \frac{Pab}{6}(l + a) = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6}$$

$$S^0_{1,B} = \frac{2}{3}\frac{pl^2}{8} l \frac{l}{2} = \frac{pl^4}{24}$$

Reacţiunea în reazemul 1 se compune din reacţiunile date în acest reazem de cele două grinzi alăturate

$$\text{pentru } l_1, \quad B = B_0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1}$$

$$\text{pentru } l_2, \quad A = A_0 + \frac{M_1 - M_2}{l_2}$$

deci

$$V_1 = A + B = A_0 + B_0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1} + \frac{M_1 - M_2}{l_2}$$

91. Aplicaţii. Vom întrebuinţa formula lui Clapeyron, pe care am stabilit-o, la câteva cazuri simple.

a). *Grindă pe trei reazeme, sarcină uniform distribuită.* Cele două reazeme extreme 0 şi 2 fiind libere, momentele pe reazeme M_0, M_2 sunt nule. Avem deci o singură necunoscută M_1. Ecuaţia lui Clapeyron ne dă

$$2 M_1 (l_1 + l_2) = - \frac{p_1 l^3_1 + p_2 l^3_2}{4}$$

$$M_1 = - \frac{p_1 l^3_1 + p_2 l^3_2}{8 (l_1 + l_2)}$$

moment pe reazem negativ, care se scade din momentele pozitive date de sarcină. (fig. 154)

Reacţiunile sunt

$$V_0 = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{M_1}{l_1}$$

$$V_1 = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2}{2} + \frac{M_1}{l_1} + \frac{M_1}{l_2}$$

$$V_2 = \frac{p_2 l_2}{2} - \frac{M_1}{l_2}$$

$$V_0 + V_1 + V_2 = p_1 l_1 + p_2 l_2$$

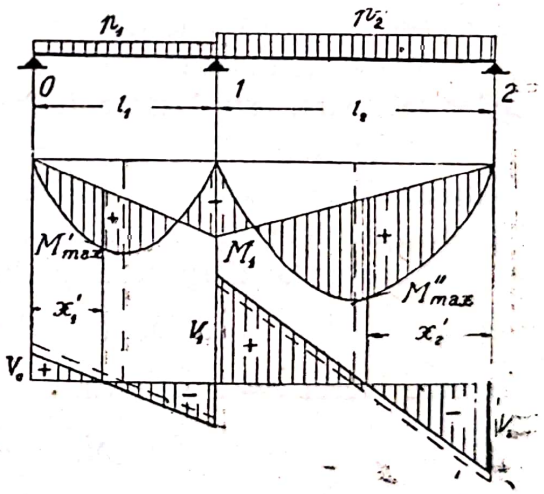


Fig. 154

Avem nişte momente maxime pozitive, care se găsesc în secţiile date de

$$x'_1 = \frac{V_0}{p_1}, \quad x'_2 = \frac{V_2}{p_2}$$

şi pentru care găsim valorile

$$M'_{max} = \frac{V^2_0}{2p_1}, \quad M''_{max} = \frac{V^2_2}{2p_2}$$

b). *Grindă pe patru reazeme:* Să luăm sarcina dată în

figură (fig. 155) şi să întrebuinţăm formula lui Clapeyron. Va trebui să scrim de două ori ecuaţia aceasta pentru câte trei

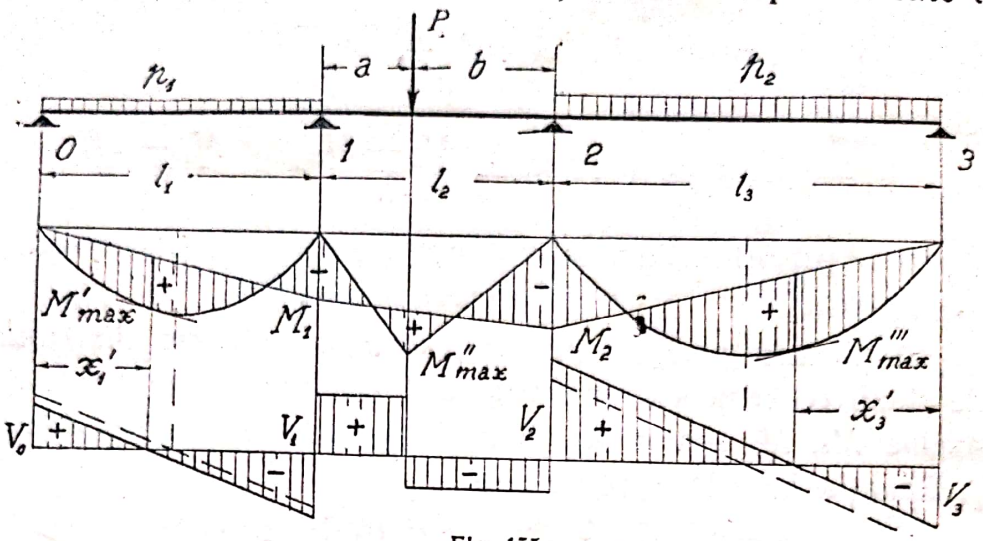


Fig. 155

reazeme consecutive. Vom lua şi aci $M_0 = M_3 = 0$.

$$2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -\frac{p_1 l^3_1}{4} - \frac{Fb(l^2_2 - b^2)}{l_2}$$

$$M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) = -\frac{p_2 l^3_3}{4} - \frac{Pa(l^2_2 - a^2)}{l_2}$$

din care vom afla cele două necunoscute, M_1 şi M_2.

Restul determinării reacţiunilor, momentelor maxime, forţelor tăietoare, este lăsat cititorului.

c). *Grinda înţepenită şi rezemată, sarcină uniform distribuită.* Vom considera reazemul înţepenit ca două reazeme foarte apropiate, aşa încât avem o grindă pe trei reazeme.

Ecuaţia lui Clapeyron ne dă

$$2M_1 (l + \varepsilon) = -\frac{pl^3}{4}$$

în care facem $\varepsilon = 0$ şi avem

$$M_1 = -\frac{pl^2}{8}$$

Putem să scrim acest lucru şi direct, căci reazemul înţepenit înseamnă că tangenta este orizontală. Deci $S_B = 0$ adică

$$M_1 \frac{l}{2}\frac{2l}{3} + \frac{pl^2}{8} l \frac{2}{3}\frac{l}{2} = 0.$$

$$M_1 = -\frac{pl^2}{8}$$

Cunoscând momentul pe reazem se pot scrie reacţiunile, momentul pozitiv maxim, forţele tăietoare. (fig. 156)

Reacţiunea în reazemul liber va fi

$$V = \frac{pl}{2} - \frac{pl}{8} = \frac{3\,pl}{8}$$

iar momentul încovoietor va deveni maxim pentru

$$x_1' = \frac{V}{p} = \frac{3\,l}{8}$$

obţinând valoarea

$$M_{max} = \frac{V^2}{2\,p} = \frac{9\,pl^2}{128}$$

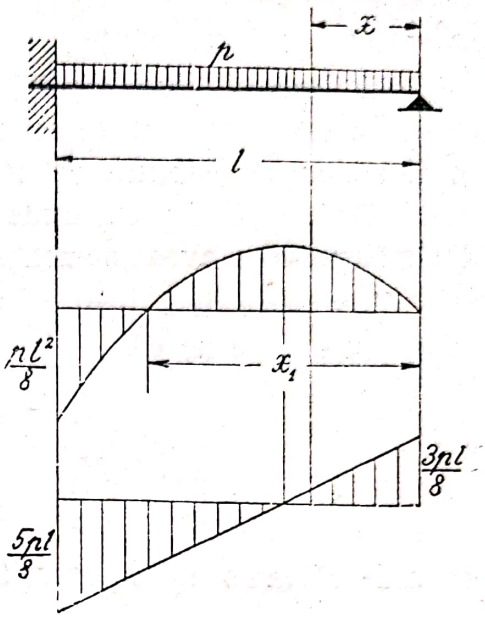


Fig. 156

d) *Grinda înţepenită la ambele capete, sarcina concentrată.* Vom lua grinda pe patru reazeme, fiecare din cele două reazeme foarte apropiate. Scriind de două ori ecuaţia lui Clapeyron pentru câte trei reazeme consecutive avem

$$2M_1(l+\varepsilon) + M_2 l = -\frac{Pb\,(l^2 - b^2)}{l}$$

$$M_1 l + 2M_2(l+\varepsilon) = -\frac{Pa\,(l^2 - a^2)}{l}$$

în care facem $\varepsilon = 0$.
avem deci două ecuaţii

$$2M_1 + M_2 = -\frac{Pab}{l^2}(l+b)$$

$$M_1 + 2M_2 = -\frac{Pab}{l_2}(l+a)$$

de unde

$$M_1 = -\frac{Pab^2}{l^2},\quad M_2 = -\frac{Pa^2 b}{l^2}$$

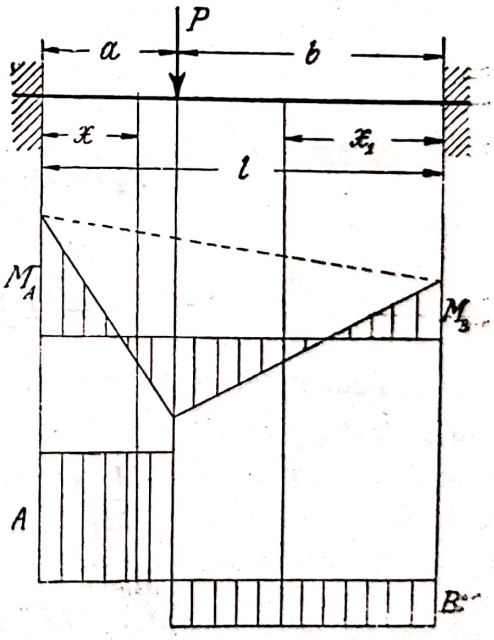


Fig. 157

Acest lucru putem să-l scrim şi direct, căci condiţia de deformaţie cunoscută care ne dă tangenta pe reazeme egale cu zero, ne duce la

$$S_A = 0,\quad S_B = 0$$

adică tocmai la ecuaţiile de mai sus

Cunoscând momentele pe reazeme se pot scrie reacţiunile, momentele încovoietoare şi forţele tăietoare (fig. 157)

92. **Puncte fixe.** Dacă unele deschideri ale unei grinzi continue sunt neîncărcate, momentul va varia liniar între valorile momentelor pe reazeme. Să considerăm o asemenea grindă, cu deschiderile neîncărcate, unde începând de la primul reazem din stânga vom avea momentele pe reazem M_1, M_2, M_3 ...

Vom scrie deci pentru primele trei reazeme ecuaţia lui Clapeyron, care ne dă

$$2M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = 0$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{l_2}{2 (l_1 + l_2)}$$

se vede că momentele vor schimba semnul şi că raportul lor nu depinde de sarcină, ci numai de datele geometrice ale grinzii. Aceasta înseamnă că, ori care ar fi valoarea sarcinei, dreapta momentelor trece printr'un punct fix F_2, corespunzător deschiderii l_2, ale cărui distanţe la reazeme a_2, b_2 putem să le determinăm. (fig. 158)

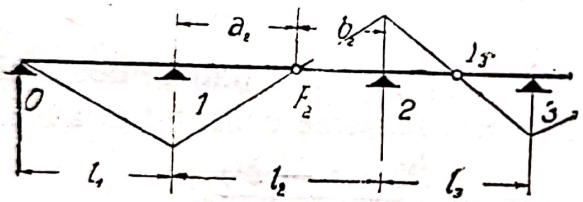


fig. 158

$$\frac{M_1}{M_2} = -\frac{a_2}{b_2} = -\frac{1}{k_2}$$

$$k_2 = \frac{b_2}{a_2} = \frac{2 (l_1 + l_2)}{l_2}$$

$$a_2 = \frac{l_2}{1 + k_2}, \quad b_2 = \frac{k_2 l_2}{1 + k_2}$$

Vom putea deci scrie în acelaşi mod pentru deschiderea l_n şi l_{n+1}

$$\frac{M_{n-1}}{M_n} = -\frac{a_n}{b_n} = -\frac{1}{k_n}$$

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = -\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = -\frac{1}{k_{n+1}}$$

şi înlocuind în ecuaţia lui Clapeyron

$$M_{n-1}\, l_n + 2\, M_n\, (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}\, l_{n+1} = 0$$

vom găsi o formulă de recurenţă

$$-\, M_n \frac{l_n}{k_n} + 2 M_n\, (l_n + l_{n+1}) - M_n\, l_{n+1}\, k_{n+1} = 0$$

$$k_{n+1} = 2\, \frac{l_n + l_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{l_n}{l_{n+1}}\, \frac{1}{k_n}$$

Odată cunoscut raportul k_{n+1} vom putea afla distanţele punctului fix F_{n+1}, pentru deschiderea $n + 1$

$$a_{n+1} = \frac{l_{n+1}}{1 + k_{n+1}}, \qquad b_{n+1} = \frac{l_{n+1}\, k_{n+1}}{1 + k_{n+1}}$$

Se pot determina punctele fixe şi printr'o construcţie grafică. Să relu m relaţia

$$\frac{M_1}{M_2} = -\, \frac{l_2}{2\,(l_1 + l_2)} = -\, \frac{1}{k_2}$$

din care aflăm distanţa a_2 a punctului fix F_2

$$a_2 = \frac{l_2}{1 + k_2} = l_2\, \frac{l_2}{2\, l_1 + 3\, l_2}$$

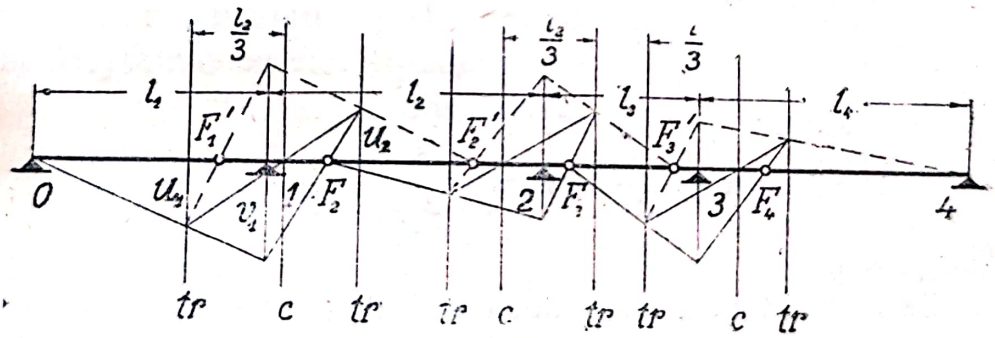


Fig. 159

Construcţia este atunci următoarea (fig. 159): împărţim fiecare deschidere în trei părţi egale şi ducem verticalele acestor puncte. Ele poartă numele de *trisectoare*. Se vede că reazemul cade între două trisectoare la distanţele $l/3$. Se duce verticala simetrică faţă de reazem, care este la distanţa inversată, şi care poartă numele de *contraverticală*.

Să ducem prin reazemul 0 o dreaptă care taie pe trisectoare

şi pe verticala reazemului 1, două segmente u_1 şi v_1. Vom avea

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{2}{3}$$

Din extremitatea u_1 ducem prin piciorul contraverticalei o dreaptă, care taie pe trisectoarea deschiderii a doua un segment u_2. Vom avea

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

Unind extremităţile v_1 cu u_2 obţinem punctul F_2 şi avem

$$\frac{v_1}{u_2} = \frac{3l_2}{2l_1}$$

urmează că distanţa punctului F_2 la reazem este

$$a_2 = \frac{l_2}{3} \frac{v_1}{v_1 + u_2} = \frac{l_2}{3} \frac{3l_2}{2l_1 + 3l_2}$$

deci F_2 este tocmai punctul fix, pentru deschiderea l_2.

Explicaţia trisectoarelor şi contraverticalei o avem dacă examinăm figura (fig. 160), care ne dă momentul pe reazim şi cele două deschideri alăturate. Suprafeţele momentelor pe cele două deschideri au centrele de greutate pe trisectoare, iar rezultanta este pe contraverticală, la distanţa

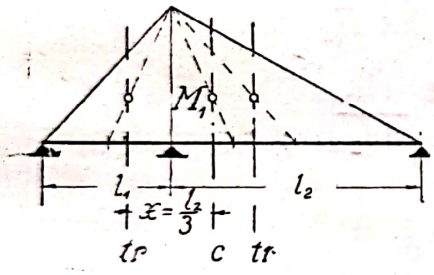


fig. 160

$$x \frac{l_1 + l_2}{2} - M_1 = \frac{l_2 M_1}{2} \frac{l_1 + l_2}{3}$$

adică $x = l/3$.

Se vede că vom avea două serii de puncte fixe după cum pornim din stânga, adică considerăm deschiderea încărcată la dreapta, sau pornim din dreapta, adică luăm deschiderea încărcată la stânga. In deschiderile extreme nu avem decât un singur punct fix, în deschiderile intermediare avem câte două puncte fixe.

93. **Aflarea grafică a momentelor pe reazem.** Se pot afla grafic momentele pe reazem, necunoscutele alese pentru grinda continuă, în cazul când numai o deschidere este încărcată

Diagrama momentelor încovoietoare este aceea schiţată în figură şi se vede (fig. 161) că dacă cunoaştem două momente pe reazem M_1, şi M_2, pentru deschiderea încărcată, putem, cu ajutorul punctelor fixe pe care le-am construit, să tragem toate celelalte momente.

Aceste momente trebue să îndeplinească condiţia de a da deformaţia cerută.

Pentru a afla deformaţia desenăm poligonul funicular al sarcinilor date de suprafaţa momentelor. In deschiderile neîncărcate momentele variază liniar, deci triunghiuri, iar forţa corespunzătoare lucrează în centrul de greutate, deci după trisectoarele indicate.

Vom desena numai tangentele curbei funiculare, considerând forţele concentrate, $f_1, f_2, \ldots f_7$.

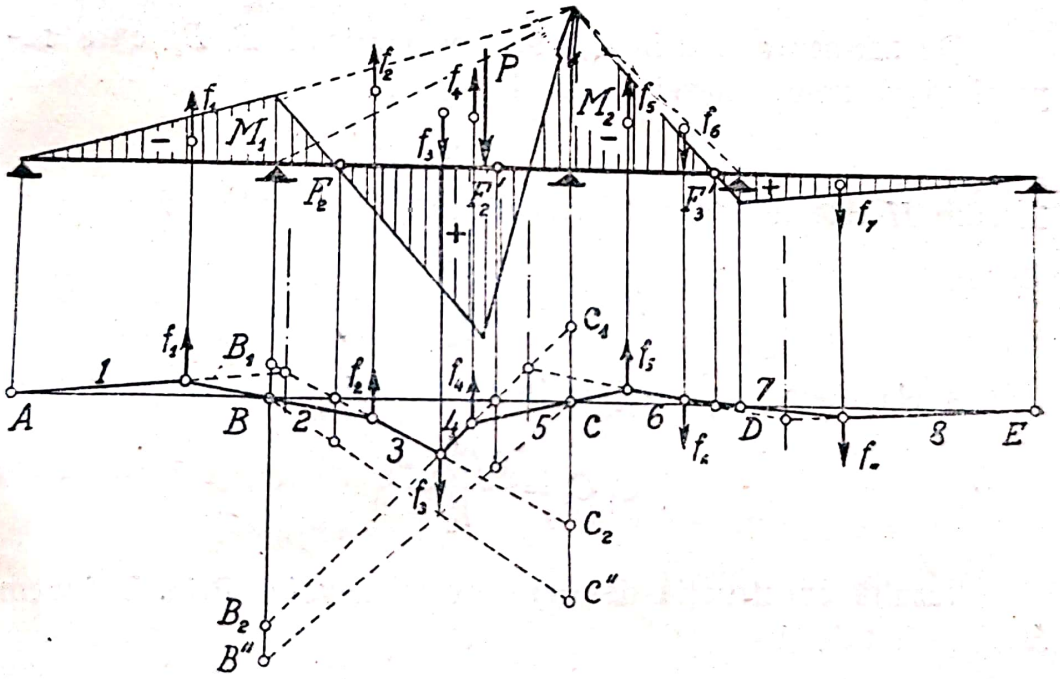


Fig. 161

Laturile poligonului funicular se taie pe verticalele forţelor, deci latura 1, 2 se taie pe trisectoarea deschiderii l_1; laturile 2,3 pe trisectoarea deschiderii l_2. Laturile 1, 3 se taie pe rezultanta forţelor f_1, f_2 care este contraverticala. Latura 2 trebue să treacă prin reazemul B, deci latura 3 trece prin punctul fix F_2.

Continuând în acelaş mod vedem că latura 4 trece prin punctul fix F'_2, latura 5 prin reazemul C, latura 6 prin punctul

fix F_3, laturile 4, 6 se taie pe contraverticală, latura 7 trece prin reazemul D, laturile 6, 8 se taie pe contraverticală, latura 8 trece prin reazemul E.

Trebue să alegem poligonul funicular care corespunde suprafeţei momentelor.

Să considerăm deschiderea încărcată, cu laturile corespunzătoare ale funicularului 2, 3, 4, 5. După proprietăţile funicularului BB_1 reprezintă momentul forţei f_2 în raport cu punctul B, adică

$$BB_1 \times H = M_1 \frac{l_2}{2}\frac{l_2}{3} = M^1 \frac{l_2^2}{6}$$

deci dacă luăm distanţa polară $H = \frac{l_2^2}{6}$ avem $BB_1 = M_1$.

De asemenea laturile 3,4 taie pe verticală $B_1\ B_2$ care reprezintă momentul forţei f_3. Deci

$$B_1\ B_2 \times H = S^0_{2,\,B}$$

în care H este determinat, deci rezultă

$$B_1\ B_2 = \frac{6\ S^0_{2,\,B}}{l_2^2}$$

Acelaş lucru vom obţine în C, găsind

$$C_1\ C_2 = \frac{6\ S^0_{2,\,C}}{l_2^2}$$

Rezultă construcţia de care avem nevoie. Prin B ducem BC'' care taie distanţa

$$B\ B'' = B_1\ B_2 = \frac{6\ S^0_{2,\,B}}{l_2^2}$$

prin C ducem $C\ B''$ care taie distanţa

$$C\ C'' = C_1\ C_2 = \frac{6\ S^0_{2,\,C}}{l_2^2}$$

intersecţiile acestor drepte cu verticalele punctelor fixe ne dă dreapta care taie pe reazeme tocmai segmentele cerute M_1, M_2

Pentru cazurile curente segmentele acestea se calculează foarte uşor.

Cazul sarcinei uniform distribuite ne dă

$$A\,A'' = \frac{6\,S^0_{2,A}}{l_2^2} = \frac{6}{l_2^2}\,\frac{2}{3}\,p l_2^2\,l_2\,\frac{l_2}{2} = \frac{p l_2^2}{4}$$

construcţia deci se vede imediat, ducând dreptele în cruce prin ordonata maximă a parabolei (fig. 162).

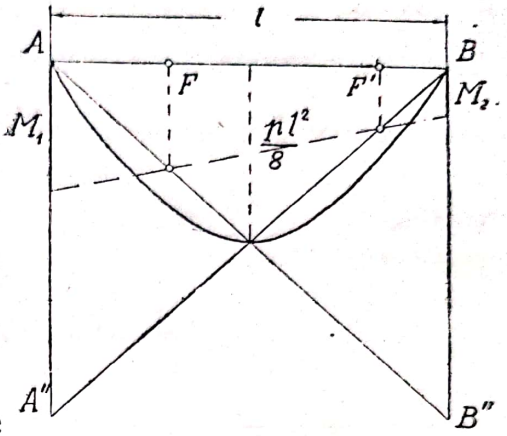


Fig. 162

Cazul sarcinei concentrate ne dă

$$A\,A'' = \frac{6}{l_2^2}\,\frac{Pab}{l}\,\frac{l}{2}\,\frac{l+a}{3} = \frac{Pab}{l}\,\frac{l+a}{l}$$

$$B\,B'' = \frac{6}{l_2}\,\frac{Pab}{l}\,\frac{l}{2}\,\frac{l+b}{l} = \frac{Pab}{l}\,\frac{l+a}{l}$$

Dacă deci luăm în stânga şi în dreapta forţei P lungimi egale cu l şi ducem dreptele punctate obţinem $A''\,B''$, vom duce dreptele $A\,B''$ şi $B\,A''$, iar cu ajutorul punctelor fixe vom afla valorile momentelor pe reazeme (fig. 163).

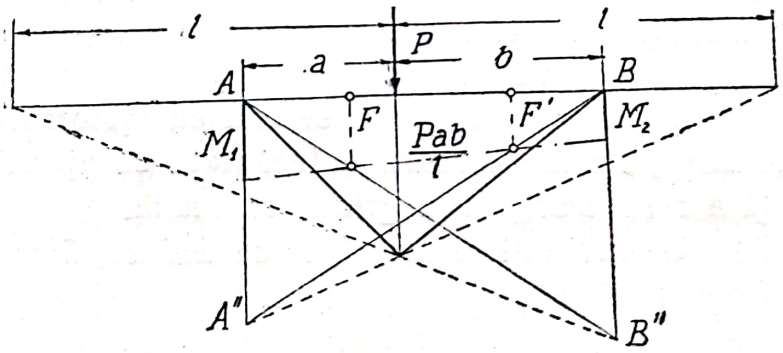


Fig. 163

Când avem mai multe deschideri încărcate se vor aduna rezultatele obţinute pentru fiecare caz în parte, şi vom face suma lor.

94. Linii de influenţă. Cazul sarcinilor mobile se rezolvă cu ajutorul liniilor de influenţă.

Pentru a afla linia de influenţă încărcăm grinda cu o sarcină $P = 1$ tonă, care ia diferite poziţii. Servindu-ne de faptul că numai o deschidere este încărcată, vom putea, pentru o poziţie oarecare a forţei, să calculăm momentele încovoietoare.

Se alege deci un număr de secţii şi se determină elementele pentru acestea, şi cu ajutorul lor trasăm pe urmă linia de influenţă. Se pot determina diferitele elemente şi prin calcul, şi se întocmesc tabele care servesc la calculul liniilor de influenţă.

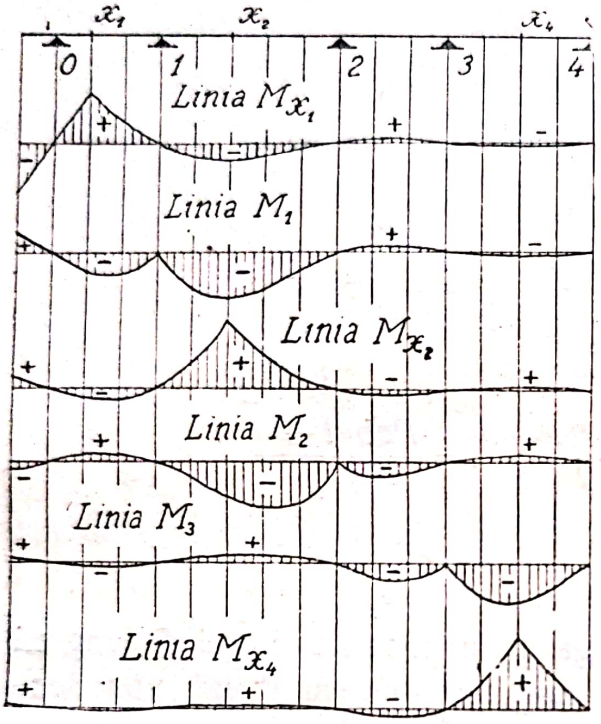


Fig. 164

Liniile de influenţă sunt curbe, şi aci alăturat (fig. 164) sunt calculate şi desenate la scară, liniile de influenţă pentru momentele încovoietoare în diferite secţii, şi momentele pe reazeme.

Se vede că influenţa unei sarcini, mai însemnată în deschiderea în care ea lucrează, este din ce în ce mai mică în deschideri mai depărtate. Pentru a obţine deci valorile maxime în cazul unui convoi mobil, urmează să încărcăm deschiderea considerată.

Semnele de asemenea se schimbă de la o deschidere la alta, aşa că urmează să încărcăm deschiderile alternate, din două în două, pentru a obţine valorile maxime.

Linia de influenţă a reacţiunii se află cu ajutorul momentelor pe reazeme, iar în deschiderea încărcată cu ajutorul liniei de influenţă a reacţiunii pentru grinda rezemată.

Din linia de influenţă a reacţiunii se deduce linia de influenţă a forţei tăietoare.

Cap. X. Rezistenţe compuse.

95. **Suprapunerea efectelor,** Până acum am examinat cazuri simple, în care am luat în considerare numai o singură încărcare şi am văzut rezistenţa şi deformaţia ce-i corespund. Dar trebue să examinăm şi cazuri mai complicate, când avem mai multe încărcări, mai multe rezistenţe şi urmărim efectele lor.

Se admite principiul suprapunerii efectelor, care ne spune că deformaţia produsă de o încărcare sau de o rezistenţă este independentă de alte încărcări, ce ar lucra în acelaş timp. Putem deci obţine deformaţia totală, suprapunând efectele produse în parte de fiecare încărcare. Acest principiu este valabil cât timp rămânem în domeniul elastic. De altfel şi legea liniară a lui Hooke, deci atât timp cât rămânem în domeniul proporţionalităţii, ne permite adunarea efectelor, fiecare din ele fiind proporţional cu sarcina care l'a produs.

Când efectul produs de diferite încărcări într'un anumit punct este de aceiaşi natură, atunci putem să facem adunarea algebrică. Astfel rezistenţele normale, produse într'un punct de diferite încărcări, au aceiaşi direcţie, deci rezistenţa compusă se poate afla prin adunare algebrică. De asemenea dacă urmărim săgeata într'un punct al grinzii într'o anumită direcţie, vom putea prin adunarea săgeţilor produse de diferite încărcări, în acel punct şi în acea direcţie, să obţinem săgeata totală.

Am făcut întrebuinţarea acestui principiu, fără să-l enunţăm explicit, când am adunat rezistenţele normale produse în acelaş punct al secţiei sub acţiunea momentului încovoietor (Nr. 76, pag. 140). Vom face aceiaşi întrebuinţare, adică vom aduna algebric rezistenţele de acelaş fel, rezultate din încărcări diferite, acesta fiind un mod de a obţine rezistenţa totală.

Scanned with OKEN Scanner

96. Rezistenţe reduse. In caz când avem rezistenţe de naturi diferite, normală şi tangenţială, produse în acelaş punct de diferite încărcări, suntem aduşi să le compunem

In acest caz, întrucât rezistenţele σ şi τ variază dintr'un loc în altul şi după direcţiile alese, vom alege direcţiile principale şi rezistenţele principale. Dacă luăm lungirea cea mai mare produsă în direcţia principală, vom calcula rezistenţa ce-i corespunde şi care se numeşte *rezistenţă redusă.*

$$\sigma_{red} = E\,\varepsilon_{max} = \sigma_I - \frac{\sigma_{II}}{m}$$

şi înlocuind valorile rezistenţelor principale avem

$$\sigma_{red} = \frac{m-1}{2m}\,\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}$$

pentru cazul obişnuit $m = 10{,}3$ găsim

$$\sigma_{red} = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2}$$

formulă care ne ajută să compunem rezistenţele normale şi cele tangenţiale.

Dacă luăm cazul particular $\tau = 0$ găsim

$$\sigma_{red} = \sigma$$

pe când pentru cazul $\sigma = 0$ avem

$$\sigma_{red} = \frac{m+1}{m}\,\tau$$

şi raportul acestor rezistenţe ne dă legătura între ele

$$\alpha_0 = \frac{\sigma}{\frac{m+1}{m}\,\tau} = \frac{\sigma}{1{,}3\,\tau}$$

Urmează deci că deformaţia corespunzătoare lunecării este faţă de deformaţia corespunzătoare întinderii în raportul $(m+1) : m$. Dacă deci admitem corpul izotrop, trebue să micşorăm rezistenţa la lunecare în acelaş raport, pentru a avea aceleaşi deformaţiii, deci să luăm $\alpha_0\,\tau$ şi să scrim

$$\sigma_{red} = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}$$

Formula rezistenţelor reduse stabilită astfel se bazează pe

ipoteza a doua de rupere, care atribue ruperea materialului deformaţiei maxime.

După ipoteza lunecărilor maxime se iau în considerare rezistenţele tangenţiale maxime, produse într'un punct de diferitele încărcări. Acestea sunt

$$\tau_{I,II} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

şi cu ajutorul lor se caută să se compună rezistenţele normale şi tangenţiale.

In fine sunt şi alte ipoteze, care duc la formule asemănătoare, unele combinate cu rezultate luate din experienţă, căci în mare măsură experienţa hotărăşte de alegerea unei ipoteze.

§ 1. Incovoiere cu întindere sau compresiune

97. **Aflarea rezistenţelor.** Până acum ne-am ocupat de grinda supusă la moment încovoietor şi forţă tăietoare şi aceasta din cauză că am considerat cazul sarcinilor normale pe axa grinzii. Când însă avem sarcini oricum, atunci reducerea lor la centrul de greutate al secţiei ne va da o rezultantă oarecare, deci două componente una după axa piesei, adică normală pe secţie N, alta conţinută în secţie T. Apare deci încovoierea însoţită de forţa normală, întindere sau compresiune.

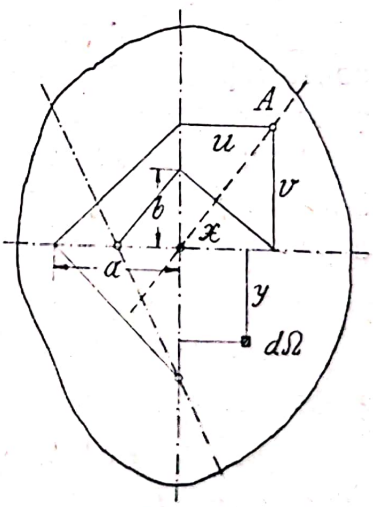


Fig. 165

Vom considera cazul simplu când avem o forţă normală N ce lucrează asupra secţiei. Să raportăm secţia la axele ei principale, faţă de care avem coordonatele u, v, ale punctului A unde lucrează forţa (fig. 165) Făcând reducerea forţelor faţă de centrul de greutate, vom avea două momente încovoietoare faţă de cele două axe

$$M_x = Nv$$

$$M_y = Nu$$

şi forţa normală N lucrând în centrul de greutate.

Scanned with OKEN Scanner

Toate aceste trei sarcini dau rezistenţe normale. Deci cele trei rezistenţe produse într'un punct oarecare al secţiei $d\,\Omega\,(x,\,y)$ se vor aduna algebric

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M_x\,y}{I_x} + \frac{M_y\,x}{I_y}$$

sau dacă introducem razele de giraţie, $I_x = a^2\,\Omega, I_y = b^2\,\Omega$

$$\sigma = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{v\,y}{a^2} + \frac{u\,x}{b^2}\right)$$

vedem deci că rezistenţa variază liniar şi este nulă în axa neutră, a cărei ecuaţie este

$$1 + \frac{v\,y}{a^2} + \frac{u\,x}{b^2} = 0$$

care acum nu mai trece prin centrul de greutate.

Construcţia axei neutre se poate face cu ajutorul ecuaţiei ei, determinând punctele unde dreapta taie axele, coordonatele la origină, căci avem

$$v\,y_0 = -\,a^2$$

$$u\,x_0 = -\,b^2$$

construcţia grafică a acestor expresii nu prezintă nici o greutate şi se găseşte pe figură.

Axa neutră împarte secţia în partea comprimată şi cea întinsă. Rezistenţele maxime se găsesc în punctele cele mai depărtate de axa neutră. In centrul de greutate rezistenţa este

$$\sigma_0 = \frac{N}{\Omega}$$

şi este compresiune sau întindere după forţa N.

Observăm că între axa neutră şi punctul A este o legătură strânsă Dacă exprimăm coeficientul unghiular al axei neutre avem

$$m = -\,\frac{a^2}{b^2}\,\frac{u}{v}$$

ori v/u reprezintă tocmai coeficientul unghiular m' al dreaptei $O\,A$, care este linia forţelor. Avem deci

$$m\,m' = -\,\frac{a^2}{b^2}$$

ceeace după cum ştim ne arată că *axa neutră şi linia forţelor reprezintă două direcţii conjugate* faţă de elipsa de inerţie.

Din formula rezistenţei mai putem deduce încă o proprietate, căci x y şi u v pot fi schimbate între ele, fără ca valoarea rezistenţei să se schimbe. Putem deci zice: *rezistenţa într'un punct M (x, y) produsă de forţa P ce lucrează în A (u, v), este aceiaşi cu rezistenţa produsă în A de aceiaşi forţă ce lucrează în M.* Aceasta este o proprietate de reciprocitate pe care o vom mai întâlni şi sub altă formă mai târziu.

De asemenea dacă considerăm axa neutră corespunzătoare unui punct oare care A, x, y împreună cu u, v satisfac ecuaţia acestei axe. Înseamnă deci că dacă am luat un punct pe axa neutră $n\,n'$, axa neutră corespunzătoare lui trebue să treacă prin punctul A, care devine astfel polul axei neutre faţă de elipsa de inerţie. Invers, dacă polul A se va mişca pe o dreaptă, axa neutră corespunzătoare trece printr'un punct fix, polul acelei drepte faţă de elipsa de inerţie.

O secţie curentă în aplicaţii este dreptunghiul, pentru care putem stabili o formulă simplă. Să considerăm cazul când forţa N lucrează într'unul din planele principale, deci punctul A se va găsi pe axa dreptunghiului la distanţa e (fig. 166). Se vorbeşte atunci de excentricitatea forţei, numindu-se acest caz *compresiune excentrică*. Rezistenţa produsă va fi

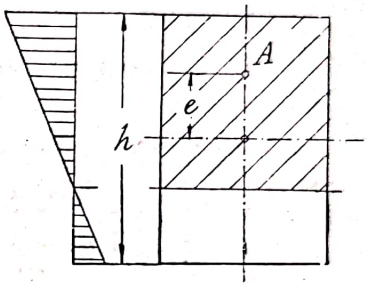


Fig. 166

$$\sigma = \frac{N}{\Omega}\left(1 \pm \frac{e\,y}{\frac{1}{12}\,h^2}\right)$$

Rezistenţele maxime vor avea loc pentru fibrele cele mai depărtate $y = \pm h/2$ şi găsim

$$\sigma_{max} = \frac{N}{\Omega}\left(1 \pm \frac{6\,e}{h}\right)$$

formulă ce se întrebuinţează pentru calculul secţiilor dreptunghiulare supuse la compresiune excentrică.

In acest caz axa neutră este perpendiculară pe axa principală, deci paralelă cu a doua axă, la distanţa $y_0 = -a^2/v = -h^2/12\,e$.

Exemplu. Pereţii unui atelier, trebue să suporte greutatea unei macarale $P = 5$ t, cu o excentritate de $e = 70$ cm. Să se calculeze grosimea peretelui.

Peretele între două ferestre, va forma un stâlp care suportă sarcina. Admitem lăţimea zidului între ferestre $b = 1{,}40$ m şi vom calcula grosimea. Luăm $\sigma_a = 7$ pentru zidărie de cărămidă.

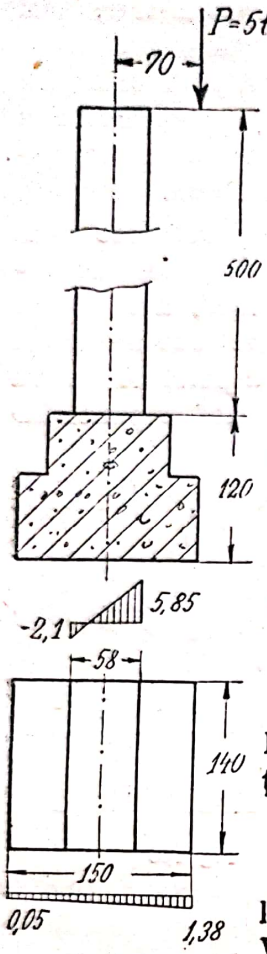


Fig. 167

Vom aplica formula pentru dreptunghiu care devine

$$\Omega = 140 \times h = \frac{5000}{7}\left(1 + \frac{6 \times 70}{h}\right)$$

din care scoatem

$$h \cong 50$$

ceea ce corespunde unui zid de două cărămizi, şi vom lua deci

$$h = 58 \text{ cm}$$

Dacă adăogăm acum greutatea proprie

$$G = 1{,}40 \times 0{,}58 \times 5{,}0 \times 1500 = 5334 \text{ kg},$$

care ne dă o rezistenţă

$$\sigma_g = \frac{G}{\Omega} = 0{,}75$$

şi adunăm cu rezistenţa produsă de sarcina P

$$\sigma_p = \frac{5000}{140 \times 58}\left(1 + \frac{6 \times 70}{38}\right) = 5{,}1$$

Pentru fundaţie admitem $\sigma_a = 1{,}5$ şi lăsând aceeaşi lăţime b vom avea

$$\Omega = 140 \times h = \frac{5000}{1{,}5}\left(1 + \frac{6 \times 70}{h}\right)$$

la care răspunde $h = 115$ cm.

Verificând sub greutatea proprie, la o adâncime de 1 m va trebui să sporim dimensia şi alegem $h = 1{,}50$ m. Avem

$$G' = 5374 + 1{,}00 \times 1{,}50 \times 0.5 \times 2200 + 1{,}50 \times 1{,}40 \times 0{,}70 \times 2200 = 10\,144 \text{ kg}$$

şi avem rezistenţele

$$\sigma_g = \frac{G'}{\Omega} = \frac{10144}{140 \times 150} = 0{,}48$$

$$\sigma_p = \frac{5000}{140 \times 150}\left(1 - \frac{6 \times 70}{150}\right) = 0{,}90$$

$$\sigma_{max} = 0{,}48 + 0{,}90 = 1{,}38$$

(dacă am fi luat 1,45, am fi găsit $\sigma_{max} = 1{,}82$). In partea cealaltă a secţiei vom avea

$$\sigma_p = \frac{5000}{140 \times 150}\left(1 - \frac{6 \times 70}{150}\right) = 0{,}43$$

$$\sigma_{max} = 0{,}48 - 0{,}43 = 0{,}05$$

98. Sâmbure central. Ne putem pune întrebarea cum trebue să lucreze forţa N, aşa ca în interiorul secţiei să nu

avem decât compresiuni, adică axa neutră să nu taie secţia. Acest lucru prezintă importanţă în cazul zidăriei, care nu rezistă la întindere.

Dacă considerăm secţia noastră şi axa neutră în poziţia *I*, vom putea determina punctul 1 unde trebue să lucreze forţa *N*. Când *N* se apropie de centru, axa neutră se depărtează, când *N* se depărtează de centru, axa neutră se apropie, taie secţia, deci vor apărea tensiuni.

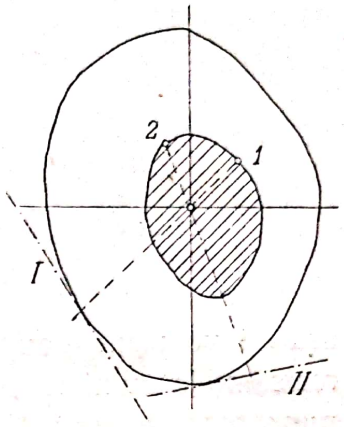


Fig. 168

Trasând felurite poziţii ale axei neutre, vom determina poziţiile respective ale punctului unde lucrează forţa, care alcătuiesc figura haşurată ce se numeşte *sâmbure central* (fig. 168). Când sarcina cade în interiorul sâmburelui central nu avem în secţie de cât compresiuni.

Aflarea sâmburelui central se face cu ajutorul ecuaţiilor axei neutre şi este un simplu exerciţiu de algebră.

Astfel pentru dreptunghiu (fig. 169).

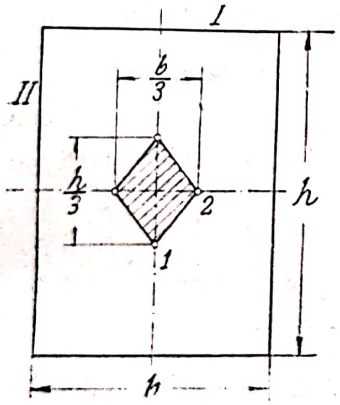


Fig. 169

$$v_1 y_1 = -a^2 = -\frac{h^2}{12}$$

ori cum $y_1 = h/2$, rezultă

$$v_1 = -\frac{h}{6}$$

de asemenea

$$u_1 x_1 = -b^2 = -\frac{b^2}{12}$$

$$u_1 = -\frac{b}{6}$$

sâmburele central fiind astfel un romb cu diagonalele $h/3$, $b/3$. De aci regula practică: pentru ca secţia să nu lucreze la întindere trebue ca sarcina să cadă în treimea mijlocie.

Pentru cerc (fig. 170).

$$v_1 y_1 = -a^2 = -\frac{r^2}{4}$$

$$v_1 = -\frac{r}{4}$$

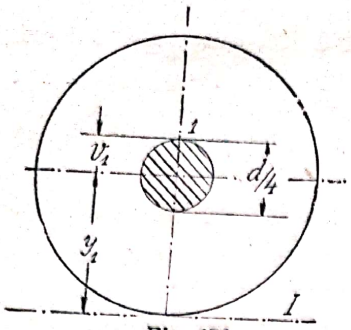


Fig. 170

şi deci sâmburele central este un cerc concentric cu raza $r/4$.

Putem afla şi rezistenţele cu ajutorul sâmburelui central. Dacă ne referim la două axe conjugate ce trec prin centrul de greutate, linia forţelor $O\,A$ şi o axă paralelă cu axa neutră, vom putea scri faţă de aceste axe

$$\sigma = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{v\,y}{r^2}\right)$$

aşa că vom putea exprima rezistenţele maxime corespunzătoare punctelor la distanţele maxime $y = a_1, a_2$.

La poziţia axei neutre trecând prin aceste puncte, obţinem în sâmburele central, pe axa $O\,A$, punctele S_1 şi S_2 (fig. 171), ale căror distanţe sunt date de relaţiile

$$a_1\,s_1 = a_2\,s_2 = -r^2$$

în care r este raza de giraţie corespunzătoare acestei direcţii, aşa că rezistenţele devin

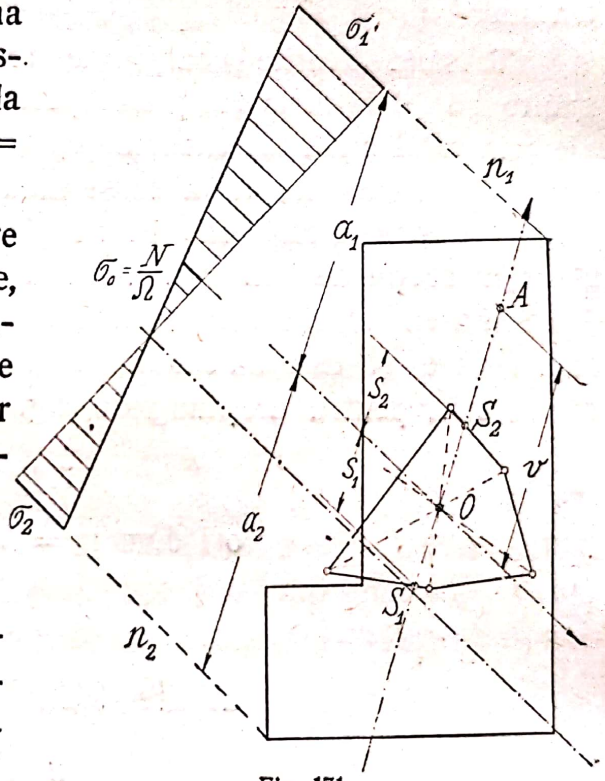


Fig. 171

$$\sigma_{1\,max} = \frac{N}{\Omega}\left(1 - \frac{v\,a_1}{r^2}\right) = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{v}{s_1}\right) = \frac{N}{\Omega}\,\frac{s_1 + v}{s_1}$$

$$\sigma_{2\,max} = \frac{N}{\Omega}\left(1 + \frac{v\,a_2}{r^2}\right) = \frac{N}{\Omega}\left(1 - \frac{v}{s_2}\right) = \frac{N}{\Omega}\,\frac{s_2 - v}{s_2}$$

ceeace se mai poate scrie

$$\sigma_{1\,max} = \frac{N.A\,S_1}{\Omega\,s_1}, \quad \sigma_{2\,max} = -\frac{N.A\,S_2}{\Omega\,s_2}$$

numărătorii sunt nişte momente, şi anume momentele forţei N faţă de punctele S_1 şi S_2, şi le vom nota M_{s1}, M_{s2}, pe când la

numitor găsim o cantitate care este de natura modulului de rezistenţă W. Formula de mai sus pe care o putem scrie

$$\sigma_{max} = \frac{M_s}{\Omega s}$$

este deci generalizarea formulei cunoscute a lui Navier şi ne dă rezistenţele maxime în secţie, cu ajutorul momentelor încovoietoare luate faţă de sâmburele central.

Aplicând acestea la secţia dreptunghiulară, încărcată cu sarcina excentrică N, avem

$$M_1 = N\left(\frac{h}{6} + e\right),\ s_1 = \frac{h}{6}$$

de unde deducem

$$\sigma_{1,2} = \frac{M_1}{\Omega s_1} = \frac{N}{\Omega}\left(1 \pm \frac{6e}{h}\right)$$

formula dedusă mai înainte.

99. **Calculul masivelor de zidărie.** In cazul unui masiv de zidărie supus la compresiune şi încovoiere, se preferă să se neglijeze complect rezistenţa la tensiune, ca şi cum materialul nu ar lucra. In adevăr rezistenţa la tensiune a zidăriei este rezistenţa mortarului care e foarte slabă.

Va trebui deci să întroducem în calcul numai porţiunea de secţie care este comprimată, or aceasta depinde de poziţia axei neutre, care la rândul ei depinde de sarcina care lucrează. Nu vom mai putea deci aplica formulele de mai sus şi trebue să facem altă teo ie.

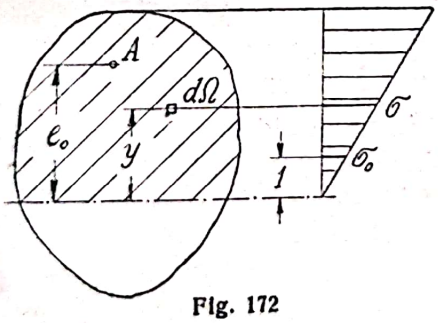


Fig. 172

Să considerăm secţia noastră şi să presupunem că axa neutră ar fi $n\ n$, iar rezistenţele vor fi repartizate liniar, nule în axa neutră şi crescând până la fibra cea mai depărtată. Pentru a cunoaşte variaţia rezistenţelor este de ajuns să cunoaştem rezistenţa în un punct şi fie σ_0 rezistenţa la distanţa de axa neutră egală cu unitatea. Atunci în un element $d\Omega$, la distanţa y de axa neutră vom avea

$$\sigma = \sigma_0 . y$$

Rezistenţa astfel repartizată, trebue să facă echilibru forţei nor-

male N şi momentului $M = Ne_0$ pe care îl luăm în raport cu axa neutră.

$$\int \sigma \, d\Omega = \sigma_0 \int y d\Omega = \sigma_0 S = N$$

$$\int \sigma y \, d\Omega = \sigma_0 \int y^2 \Omega = \sigma_0 I_0 = M = Ne_0$$

de unde scoatem condiţia

$$e_0 = \frac{I_0}{S_0}$$

care ne determină axa neutră, punctul de aplicaţie al forţei N fiind cunoscut.

In cazul secţiei dreptunghiulare, avem pentru poziţia forţei în A, la distanţa c

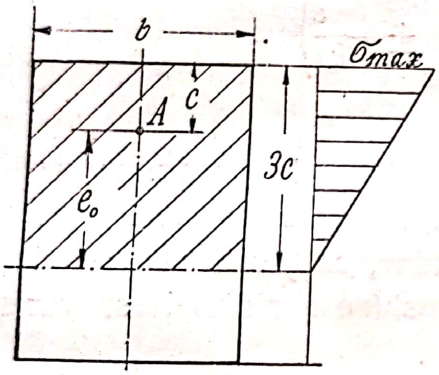


Fig. 173

$$e_0 = \frac{I_0}{S_0} = \frac{\frac{1}{12} b (e_0 + c)^3}{\frac{1}{2} b (e_0 + c)^2}$$

$$e_0 = \frac{2}{3}(e_0 + c)$$

$$e_0 = 2c$$

rezultă deci că partea comprimată ocupă $3c$, aşa în cât A să se găsească neapărat în treimea mijlocie. Rezistenţa va varia liniar aşa că vom putea scrie

$$\sigma_{max} = \frac{2P}{3bc}$$

formulă cu care se calculează în acest caz rezistenţele.

Exemplu. Zidul unui baraj are o secţie trapezoidală având la creastă 0,90 m, la bază 1,60 m şi înălţimea de 5,00 m. Nivelul apei se află la 80 cm sub creastă. Să se afle rezistenţa pe teren.

Barajul este supus la împingerea apei care este

$$H = \gamma \frac{h^2}{2} = 1000 \frac{4{,}2^2}{2} = 8820 \text{ kg.}$$

care lucrează la o treime din înălţime, adică la $4{,}2 : 3 = 1{,}4$ m.

Greutatea proprie a zidăriei este

$$G = \frac{0{,}9 + 1{,}6}{2} \times 5 \times 2400 = 15000 \text{ kg}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultanta acestor două forţe va înţepa deci planul bazei la o distanţă de G, dată de

$$\frac{8820 \times 1,4}{15000} = 0,823 \text{ m.}$$

Verticala centrului de greutate se găseşte faţă de muchia exterioară a bazei la o distanţă

$$\frac{1,6}{2} + \frac{1,6 - 0,9}{2} \frac{1}{3} \frac{0,9 + 2 \times 1,6}{0,9 + 1,6} = 0,991 \text{ m.}$$

şi deci rezultata se află la o distanţă de această muche $c = 99,1 - 82,3 = 16,8$ cm.

Rezultă deci

$$\sigma_{max} = \frac{N}{3\,b\,c} = \frac{15000}{3 \times 16,8 \times 100} = 2,97 \text{ kg/cm}^2$$

§ 2. Incovoiere cu răsucire.

100. **Aflarea rezistenţelor.** In cazul când lucrează un moment încovoietor şi un moment de răsucire, sau o forţă care nu taie axa barei deci are faţă de aceasta un moment, se vor produce rezistenţe compuse, şi anume momentul încovoietor M_i produce rezistenţe normale σ şi momentul de răsucire M_t produce rezistenţe tangenţiale τ. Acestea variază dintr'un loc în altul, se compun dând rezistenţe principale, şi trebue să alegem rezistenţa cea mai defavorabilă, care este rezistenţa redusă, pentru a calcula secţia.

Să considerăm un arbore de secţie circulară, la care intră în joc momentul de răsucire care transmite lucrul mecanic prin rotaţie, pe lângă momentul încovoietor produs de greutatea roţilor, tensiunea curelelor şi orice alte forţe normale pe axa arborelui.

In practică avem cel mai des cazul secţiei circulare şi în acest caz momentul încovoietor lucrează după un diametru al secţiei, care este axă principală şi deci putem scrie

$$\sigma = \frac{M_i\, y}{I_x}, \quad \sigma_{max} = \frac{M_i\, r}{I_x}$$

în care r este raza secţiei.

Scanned with OKEN Scanner

Momentul de răsucire M_t dă deasemenea rezistenţe tangenţiale care sunt maxime la margine

$$\tau_{max} = \frac{M_t\, r}{I_p}$$

Compunând aceste două rezistenţe, care lucrează în acelaş punct, după formula rezistenţelor reduse vom avea

$$\sigma_{red} = 0{,}35\,\frac{M_i\, r}{I_x} + 0{,}65\,\sqrt{\left(\frac{M_i\, r}{I_x}\right)^2 + 4\left(\alpha_0\,\frac{M_t\, r}{I_p}\right)^2}$$

ori, dacă ţinem seama că $I_p = 2\, I_x$, vom putea scrie

$$\sigma_{red} = \frac{M_i\, r}{I_x}\left[0{,}35 + 0{,}65\,\sqrt{1 + \left(\alpha_0\,\frac{M_t}{M_i}\right)^2}\right]$$

Se reduce astfel calculul rezistenţei compuse la calculul la încovoiere după formula lui Navier, în care locul momentului încovoietor îl ia $M = \xi\, M_i$, un moment fictiv dedus din momentul încovoietor înmulţit cu un coeficient ξ.

$$\sigma_{red} = \frac{\xi\, M_i}{W}$$

în care pentru secţia circulară, sau acea goală în interior avem

$$W = \frac{\pi\, d^3}{32},\quad W = \frac{\pi\,(D^4 - d^4)}{32\, D}$$

în care se ia adeseori $D = 2\, d$.

101. **Calculul arborilor.** Forţele ce lucrează asupra arborelui, precum tensiunile curelelor, nu sunt toate în acelaş plan. Pe lângă aceasta forţele sunt de multe ori variabile şi trebue să alegem poziţia cea mai defavorabilă. Astfel este cazul când momentul motor îl transmitem cu ajutorul unei biele. Momentul de răsucire este atunci variabil, împreună cu tensiunea sau compresiunea ce o exercită biela asupra butonului de manivelă. Forţa este nulă la punctele moarte şi maximă când biela face cu manivela un unghiu de 90°. Din cauza aceasta momentele încovoietoare şi de răsucire sunt variabile.

Presupunem un arbore cu mai multe roţi. Una din ele transmite N cai-putere cu n învârtituri pe minut, iar celelalte consumă

N_1, N_2, N_3 cai putere. Dându-ne poziţia curelelor şi a roţilor avem rezultantele tensiunilor curelelor P, P_1, P_2, P_3, ca în figură (fig. 174).

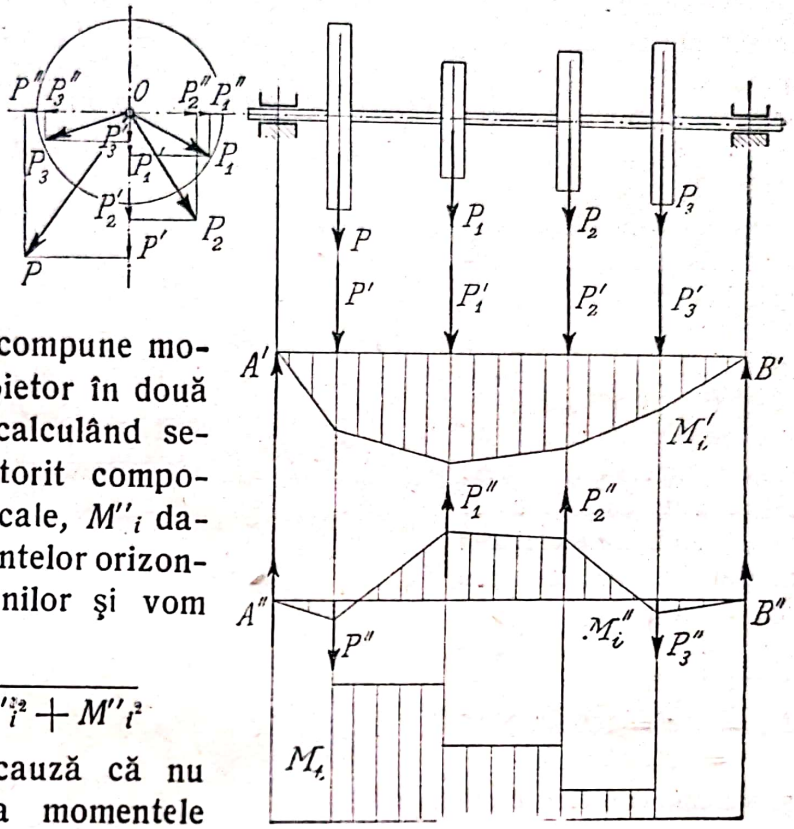


Fig. 174

Vom descompune momentul încovoietor în două componente, calculând separat M'_i datorit componentelor verticale, M''_i datorit componentelor orizontale ale sarcinilor şi vom avea

$$M_i = \sqrt{M'^2_i + M''^2_i}$$

aceasta din cauză că nu putem calcula momentele încovoietoare şi desena diagramele, decât atunci când forţele sunt toate în acelaş plan.

In ceeace priveşte momentul de răsucire el este

$$M_t = 71620 \frac{N}{n}$$

şi el variază dealungul grinzii.

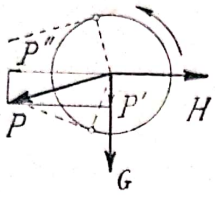
In asemenea cazuri trebue să alegem secţia cea mai defavorabilă, sau dacă e convenabil să dăm arborelui diametre diferite, având astfel un arbore de egală rezistenţă.

Exemplu. Arborele unei maşini cu aburi are dimensiile din figură. La o extremitate se găseşte manivela $r = 250$ mm, la care biela exercită o forţă $P = 10.000$ kg. Arborele mişcă un volan a cărui greutate este $G = 5000$ kg. iar cablul acestuia exercită o tensiune orizontală $H = 1.550$ kg.

Pentru a afla momentele încovoietoare ne vom pune în cazul cel mai defavorabil. Admiţând raportul între bielă şi manivelă 1 : 5, vom avea înclinarea lui P, când biela şi manivela fac un unghiu de 90° şi vom putea scrie componentele

$$P' = P \sin \alpha = 10000 \times 0{,}19652 \cong 1960 \text{ kg.}$$
$$P'' = P \cos \alpha = 10000 \times 0{,}98050 \cong 9800 \text{ kg.}$$

Când manivela parcurge cercul de sus, P este tensiune, avem deci cazul din figură. Când manivela parcurge cercul de jos, P este compresiune deci P'' şi-a schimbat senzul. Vedem că totdeauna P' lucrează în jos ca şi greutatea volanului G, pe când P'' este alternativ de acelaşi senz cu H sau de senz contrar. Vom lua deci P'' de senz contrar cu H pentru a obţine momentul maxim, după cum se vede din diagrama lui M''.



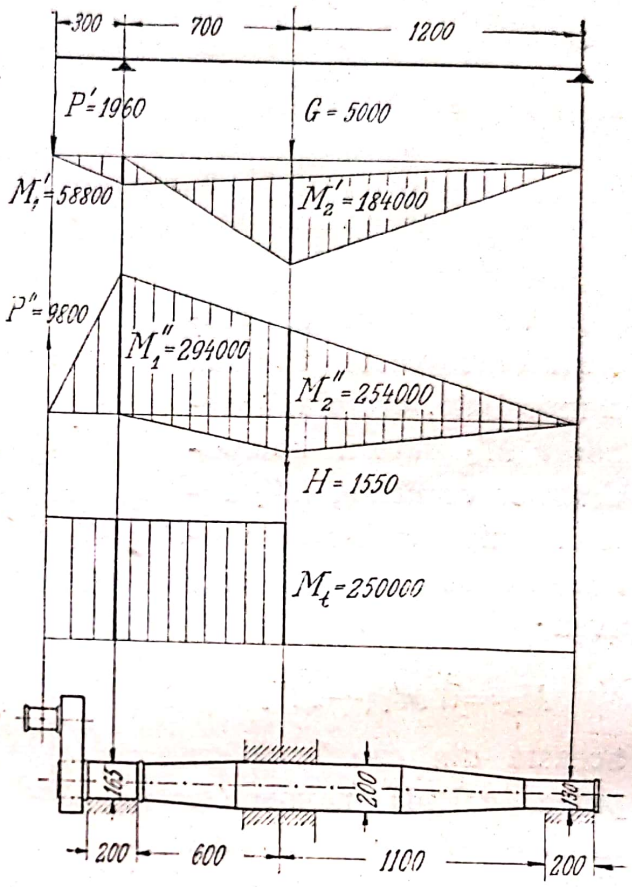


Fig. 175

Momentul de torsiune va fi

$$M_t = P\,r = 100.000 \times 25 = 250.000 \text{ kgcm}$$

şi rămâne constant de la butonul de manivelă până în dreptul volanului.

Vom calcula atunci secţiile notate în figură.

	Secţia 1	Secţia 2
M'	$1960 \times 30 = 58800$	$5000 \frac{70120}{190} - 58800 \frac{120}{190} = 184000$
M''	$9800 \times 30 = 294000$	$1550 \frac{70120}{190} + 294000 \frac{120}{190} = 254000$
M_t	$10000 \times 25 = 5000$	25000
M_i	$\sqrt{\overline{294000}^2 + \overline{58800}^2} = 299500$	$\sqrt{\overline{148000}^2 + \overline{254000}^2} = 313500$
$\frac{\alpha_0 M_t}{M_i}$	$1{,}025 \frac{250000}{299500} \cong 0{,}855$	$1{,}025 \frac{250000}{313500} = 0{,}82$
ξ	1,205	1,19067
M'	$1{,}205 \times 299500 = 359000$	$1{,}19067 \times 313500 = 372000$
W	$\frac{359000}{800} = 448$	$\frac{372000}{800} = 465$

Aflăm astfel diametrul arborelui în aceste două secţii şi anume $d_1 = 165$ mm şi $d_2 = 167$ mm.

După cum se vede în tablou am luat

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_a}{1{,}3\,\tau_a} = \frac{800}{1{,}3 \times 600} = 1{,}025$$

Profilul arborelui se găseşte desenat în figură. S'a mărit însă diametrul în dreptul volanului pentru a ţine cont de pana care îl fixează. Admiţând o pană de 30 mm, vom deduce pentru diametrul arborelui necesar în dreptul volanului $d = 200$ mm, care este notat în figură.

102. **Calculul manivelei.** Manivela lucrează desavantajos, pentrucă forţa ce transmite biela nu este axială, ci lucrează excentric la butonul de manivelă. Direcţia forţei variază şi deci vom lua cele două componente, una tangenţială T şi alta în direcţia axei manivelei N. Forţa fiind excentrică vom avea, reducând-o la centrul de greutate al secţiei, o forţă normală N, o forţă tăietoare T, un moment încovoietor $M_1 = N\,a$, în jurul axei y, un încovoietor $M_2 = T\,c$, moment în jurul axei x, şi în fine un moment de răsucire $M_t = T\,a$ (fig. 176).

Rezistenţele normale vor fi deci, pentrucă secţia este în general dreptunghiulară

$$\sigma_{max} = \frac{N}{b\,h} + \frac{N\,a}{\frac{1}{6}\,h\,b^2} + \frac{T\,c}{\frac{1}{6}\,b\,h^2}$$

în ceace priveşte răsucirea luăm

$$\tau_{max} = \frac{9\,M_t}{2\,b^2\,h} = \frac{9\,T\,a}{2\,b^2\,h}$$

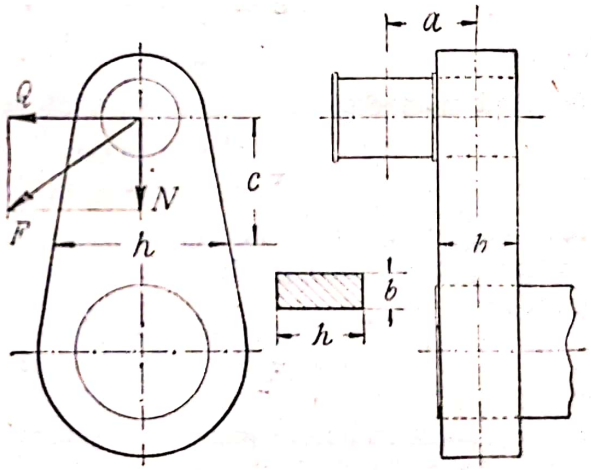


Fig 176

rezistenţă maximă care are loc la extremităţile axei mici a dreptunghiului.

Cu ajutorul rezistenţelor reduse se află pe urmă valorile maxime.

Pentru calcul se aleg dimensiile manivelei şi se verifică rezistenţele. Verificarea se face pentru diferite secţii, la punctul mort şi la maximum când biela şi manivela fac un unghiu de 90°.

Exemplu. Să verificăm manivela arborelui din exemplul precedent. Forţa în bielă $P = 10$ tone, raza manivelei $r = 250$ mm, braţul $a = 100$ mm.

Pentru poziţia la punctul mort, nu avem răsucire ci numai întindere şi încovoiere. Pentru o secţie în manivelă la $c = 160$ mm distanţă, pentru care $b = 102$ mm, $h = 180$ mm, vom avea

$$\sigma = \frac{10000}{10 \times 18} + \frac{10000 \times 10}{\frac{1}{6} 18 \times 10^2} = 389 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru o secţie trecând prin axa arborelui, avem $h = 220$ mm, din care scădem diametrul arborelui $d = 165$ mm, şi vom lua

$$\Omega = (22 - 16{,}5) \times 10 = 55 \text{ cm}^2$$

$$Wy = (22 - 16{,}5) \frac{10^2}{6} = 917 \text{ cm}^3$$

şi deci

$$\sigma = \frac{10000}{55} + \frac{10000 \times 10}{917} = 219 \text{ kg/cm}^2$$

Pentru cazul când biela face un unghiu de 90° cu manivela, în aceiaş secţie la distanţa $c = 160$ mm, vom avea numai moment încovoietor $M_2 = Tc = 160000$ kgcm, deci

$$\sigma = \frac{160000}{\frac{1}{6} 18 \times 10^2} = 533 \text{ kg/cm}^2$$

pe când momentul de răsucire va fi $Mt = Ta = 100000$ kg cm, deci

$$\tau = \frac{9 \times 100000}{2 \times 10^2 \times 18} = 250 \text{ kg/cm}^2$$

rezistenţe care au loc la mijlocul laturilor mici. In acelaşi loc avem şi rezistenţele maxime produse de tăiere care sunt pentru secţia dreptunghiulară

$$\tau = \frac{3 \times 10000}{2 \times 18 \times 10} = 83 \text{ kg/cm}^2$$

aşa că avem în aceste puncte o rezistenţă tangenţială totală egală cu $250 + 83 = 333$ kg/cm².

Compunem aceste două rezistenţe după formula rezistenţelor reduse şi avem

$$\sigma_{red} = 0{,}35 \times 533 + 0{,}65 \sqrt{533^2 + 4 (1{,}025 \times 333)^2} = 749 \text{ kg/cm}^2.$$

103. **Calculul fusurilor.** Reazemele arborilor se fac pe lagăre, iar partea care este rezemată pe lagăr ia numele de *fus*. Se presupune că presiunea lagărului se exercită pe diametrul d al fusului.

In acest caz fusul poate fi considerat ca o grindă înţepenită (fig. 177) suportând reacţiunea

$$A = p \, l \, d$$

momentul maxim este la înţepenire

$$M_{max} = \frac{p\,d\,l^2}{2} = \frac{A\,l}{2}$$

şi secţia se calculează cu

$$W = \frac{M_{max}}{\sigma_a} = \frac{\pi\,d^3}{32} = 0{,}1\,d^3$$

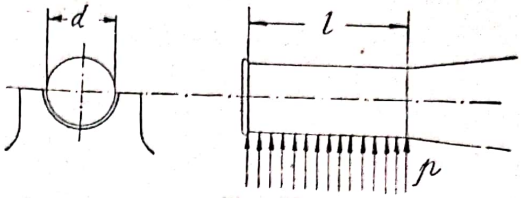


Fig. 177

Pe lângă condiţia de rezistenţă fusul trebue să satisfacă şi condiţiile de ungere, care prescriu o anumită presiune unitară, pentru ca uleiul să nu fie expulzat şi fusul să nu se încălzească.

Presiunea pe care o exercită fusul pe lagăr se admite

$$p = \frac{A}{d\,l}$$

care împreună cu condiţia de rezistenţă

$$M = 0{,}1\,d^3\,\sigma_a = \frac{A\,l}{2}$$

ne va da

$$\frac{l}{a} = \sqrt{\frac{0{,}2\,\sigma_a}{p}}$$

de obicei se ia $l = 1{,}5\,d$.

Exemplu. Să calculăm fusul la arborele din exemplul precedent. Pentru aceasta trebue să aflăm reacţiunea. Vom avea

$$B' = \frac{5000 \times 70}{190} - \frac{1960 \times 30}{190} = 1532 \text{ kg.}$$

$$B'' = \frac{1550 \times 70}{190} + \frac{9800 \times 30}{190} = 2120 \text{ kg.}$$

$$B = \sqrt{B'^2 + B''^2} = \sqrt{1532^2 + 2120^2} = 2615 \text{ kg.}$$

Vom avea deci pentru reazemul B

$$W = 0{,}1\,d^3 = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{B\,l}{2\,\sigma_a}$$

şi dacă luăm $l = 1{,}5\,d$ vom găsi

$$d = \sqrt[3]{\frac{2615 \times 15}{2 \times 800}} = 4{,}91 \text{ cm}$$

vom lua practic o dimensie mai mare $d = 130$ mm, şi o lungime $l = 200$ mm.

Scanned with OKEN Scanner

Cap. XI. Flambajul

104. Studiul experimental al flambajului. Dacă luăm o bară dreaptă, supusă la compresiune de o forţă P, vom observa că atunci când lungimea barei este mare şi bara subţire, se produce o încovoiere. Deşi sarcina este centrică şi nu avem moment încovoietor, se produce totuşi încovoiere. Se zice că bara *flambează*, cazul acesta de încărcare prin compresiune care ne dă încovoiere se numeşte *flambaj* şi bara nu mai poate fi calculată la compresiune.

Dacă luăm o sârmă de oţel, ce se fixează vertical într'o menghină, şi o încărcăm cu o forţă P, la o valoare mică a forţei nu se observă încovoiere ; (fig. 178) mărind forţa P, sârma se îndepărtează de la poziţia verticală şi mărind mereu sarcina, sârma se poate încovoia de tot.

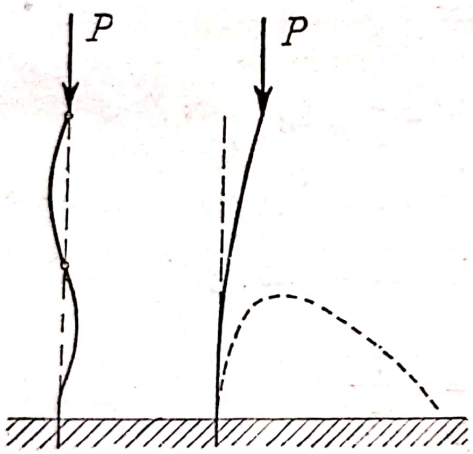


Fig. 178

Descărcând sârma ea revine la loc, deci nu am depăşit deformaţiile elastice şi rezistenţele corespunzătoare. Aceasta trădează un caz de echilibru nestabil, când forţele interioare nu mai găsesc opunerea rezistenţelor, şi nu se poate stabili echilibrul elastic interior.

Sarcina la care bara părăseşte poziţia iniţială, de echilibru, axa o linie dreaptă, luând o deformaţie mare, se numeşte *sarcina critică de flambaj* P.

Cauzele flambajului au fost căutate în excentricitatea forţei, în neregularitatea geometrică sau neomogenitatea materialului

Insă şi în caz când nu ar fi acestea, totuşi la o anumită valoare a sarcinei se produce încovoiere, deci cazul de echilibru nestabil sau flambajul.

Acest lucru nu se întâmplă la întindere, unde chiar dacă bara ar fi strâmbă, sau sarcina nu ar fi centrică, din cauză că echilibrul este stabil, se va produce îndreptarea barei, centrarea forţei şi naşterea unor rezistenţe care duc la echilibrul elastic.

Constatăm deci din experienţă că bara dreaptă, supusă la o forţă axială de compresiune la capetele ei, rămâne în echilibru cât timp sarcina nu depăşeşte o anumită valoare şi după aceia ia o formă curbă, dacă sarcina depăşeşte valoarea numită sarcina critică de flambaj P.

In aplicaţiile tehnice ne interesează diferite cazuri, după modul de rezemare al grinzii, şi cele mai obişnuite sunt patru

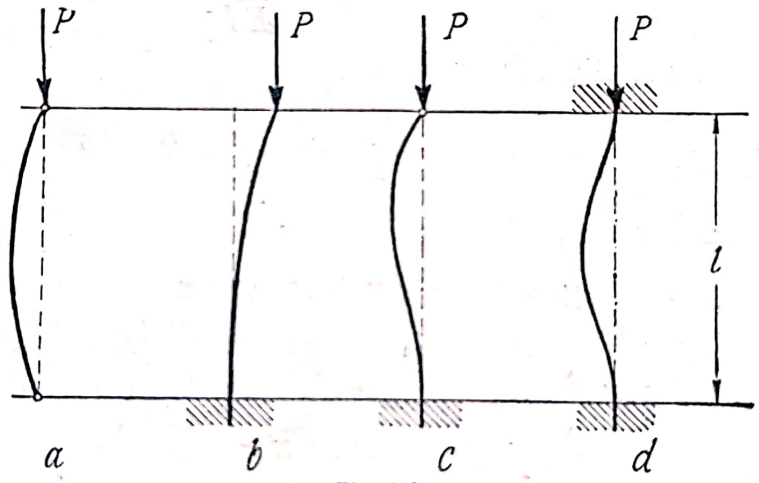


Fig. 179

cazuri (fig. 179). Cel mai des este *a)*, cazul celor două reazeme articulate, pe când celelalte trei cazuri se întâlnesc mai rar. Cazurile *b)* şi *c)* se întâlnesc la piloţii de lemn înfipţi în pământ, cu extremitatea liberă sau articulată. Cazul *d)* este foarte rar întâlnit.

Lungimea grinzii între reazeme, corespunzătoare pentru fie-care din aceste cazuri, şi care are un rol important în calcule, poartă numele de *lungimea de flambaj*,

Calculul flambajului diferă cu totul de calculele făcute până acum. Echilibrul fiind nestabil nu vom mai putea calcula rezistenţa interioară, ci ne vom mulţumi să determinăm sarcina critică de flambaj P. Nu vom încărca atunci bara de cât până la

o fracţiune din sarcina critică, luând un coeficient de siguranţă s.

Determinarea sarcinei de flambaj este o problemă de analiză, care a fost studiată de *Euler*.

105. **Stabilirea formulei lui Euler.** *Cazul a.* Să luăm o grindă articulată la cele două capete, încărcată la compresiune cu o sarcină P. (fig. 180). Sub acţiunea sarcinii bara se încovoaie, iar momentul într'o secţie oarecare va fi

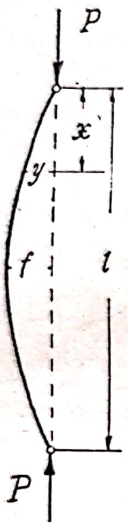


fig. 180

$$M = P\,y$$

Putem scri atunci ecuaţia axei deformate

$$E\,I\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\,P\,y$$

şi înlocuind

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

ecuaţia capătă forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2\,y = 0$$

a cărei soluţie este

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

Pentru a afla constantele de integrare scrim condiţiile pe reazeme. Pentru $x = 0$, $y = 0$ ceea ce ne dă $A = 0$, deci

$$y = B\sin\alpha x$$

Valoarea maximă a săgeţii este la mijloc, când $\sin\alpha x = 1$ şi însemnând săgeata cu f avem, $B = f$, deci

$$y = f\,\sin\alpha x$$

A doua condiţie pe reazem ne cere ca pentru $x = l$ să avem $y = 0$, deci $\sin\alpha l = 0$. Aceasta ne duce la valorile

$$\alpha l = 0,\ \pi,\ 2\pi\ldots,\ k\pi$$

şi deci axa deformată are forma unei sinusoide

$$y = f\,\sin\frac{k\pi}{l}\,x$$

în care săgeata f poate lua orice valoare, chiar şi valoarea infinită.

Scanned with OKEN Scanner

Se vede că nu putem alege valoarea $k = 0$; a doua valoare ne dă

$$\alpha l = \pi, \quad \alpha^2 = \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

care ne duce la prima valoare a sarcinei critice de flambaj

$$P_f = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Putem avea şi sarcini superioare de flambaj, pentru valorile următoare ale lui k

$$P_f = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 EI$$

dar ele sunt mai mari ca prima şi corespund cazului când sinusoida are multe ramuri, unele puncte ale axei fiind ţinute prin articulaţii şi împiedecate să se deplaseze lateral (fig. 178).

In practică nu putem încărca bara până la sarcina critică de flambaj, ci trebue să rămânem sub această eventualitate. luând ca sarcină admisibilă

$$P = \frac{\pi^2 EI}{s l^2}$$

o fracţie din sarcina critică de flambaj, în care s este coeficientul de siguranţă. In această formulă luăm întotdeauna I_{min}, acesta dându-ne axa după care se produce flambajul. Dacă voim să dimensionăm secţia unei piese, care suportă o anumită sarcină P, vom avea

$$I_{neces} = \frac{P s l^2}{\pi^2 E}$$

în care aflăm tot I_{min}.

Exemple. O proptea din lemn are secţia 15/20 şi lungimea $l = 2{,}50$ m. Să se afle sarcina ce o poate suporta la flambaj.

$$P = \frac{\pi^2 EI}{s l^2} = \frac{3{,}14^2 \times 100000 \times 5625}{8 \times 250^2} = 11150 \text{ kg.}$$

în care am luat $s = 8$. Dacă am calcula cu această sarcină numai la compresiune, am avea în acest caz rezistenţa

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} = \frac{11150}{15 \times 20} = 37 \text{ kg/cm}^2$$

ceea ce nu ar prezenta niciun pericol. Se vede de aci cât de mare este atenţia ce o dăm flambajului.

Tija pistonului unei maşini cu aburi are $l = 1200$ mm. Pistonul are $D = 600$ mm, $p = 10$ at. Să se dimensioneze tija.

$$P = \frac{\pi D^2}{4} p = 2827{,}4 \times 10 = 28270 \text{ kg.}$$

vom lua $s = 22$, şi avem

$$I_{neces} = \frac{P s l^2}{\pi^2 E} = \frac{28270 \times 22 \times 120^2}{3{,}14^2 \times 2200000} = 400 \text{ cm}^4$$

alegem secţie circulară şi rezultă $d = 95$ mm.

Dacă iarăşi am compara cu rezistenţa la compresiune am găsi aci

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} = \frac{28279}{7{,}88} = 400 \text{ kg/cm}^2$$

Cazul b. Să luăm grinda înţepenită la capătul de jos, încărcată la compresiune cu sarcina P. (fig. 181). Vom avea aceiaşi ecuaţie ca în cazul precedent

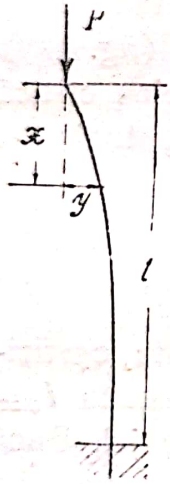


Fig. 181

$$E I \frac{d^2 y}{d x^2} = -M = -P y$$

care ne duce la aceiaşi soluţie

$$y = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

Pentru constantele de integrare ne servim de condiţiile pe reazem. Pentru $x = 0$ avem $y = 0$, deci $A = 0$ şi

$$y = B \sin \alpha x$$

a doua condiţie pe reazem ne dă pentru $x = l$, $d y/d x = 0$ deci

$$B \cos \alpha l = 0$$

ceea ce ne duce la valorile

$$\alpha l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{k+1}{2} \pi$$

care ne duce la prima valoare a sarcinii critice de flambaj

$$P_f = \frac{\pi^2 E I}{4 l^2}$$

Intrebuinţarea formulei se face ca şi în cazul precedent. Vom observa că luând $l' = 2 l$ cădem tocmai peste cazul *a*), în adevăr bara articulată

la extremităţi se compune din două jumătăţi care ar fi înţepenite în secţia din mijloc.

Cazul c. Să luăm grinda înţepenită la capătul de jos şi articulată la capătul de sus, încărcată la compresiune cu sarcina P (fig. 182). Vom tine seamă de articulaţie, care nu lasă grinda să se deplaseze lateral, întroducând reacţiunea H, împingerea necunoscută a reazemului. Momentul încovoietor va fi în acest caz

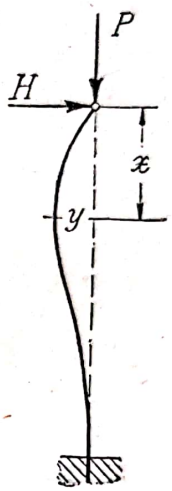


Fig. 182

$$M = Py + Hx$$

ceea ce ne duce la ecuaţia axei deformate

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py - Hx$$

şi cu aceiaşi înlocuire avem soluţia

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x - \frac{H}{P}x$$

Pentru a afla cele două constante de integrare cât şi pe H, vom scrie condiţiile pe reazeme. Pentru $x = 0$ avem $y = 0$ ceea ce ne dă $A = 0$. Pentru $x = l$ avem $y = 0$, $dy/dx = 0$, adică

$$B\sin\alpha l - \frac{H}{P}l = 0$$

$$B\cos\alpha l - \frac{H}{P} = l$$

din care scoatem

$$B(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l) = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha l = \alpha l$$

ecuaţie transcendentă a cărei primă soluţie este

$$\alpha = 4{,}49 \cong \sqrt{20}$$

care ne duce la prima valoare a sarcinei critice de flambaj

$$P_f = \frac{20EI}{l^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$$

în care, pentru a-i da o formă asemănătoare cu celelalte, am scris $10 = \pi^2$.

Cazul d. Să luăm grinda înţepenită la ambele capete şi încărcată la compresiune cu sarcina P (fig. 183). Vom ţine seamă de înţepenire , introducând un moment de înţepenire M_i, necunoscut. Momentul încovoietor într'o secţie va fi în acest caz

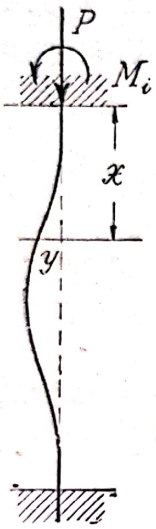


Fig. 183

$$M = Py - M_i$$

punând $M_i = P\delta$, avem ecuaţia

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py + P\delta$$

şi soluţia

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + \delta$$

Pentru a afla constantele de integrare scrim condiţiile pe reazeme. Pentru $x = 0$ avem $y = 0$ şi $dy/dx = 0$, ceea ce ne dă $B = 0$ şi

$$y = \delta(l - \cos\alpha x)$$

Dacă punem condiţia ca şi pentru $x = l$ să avem $y = 0$ şi $dy/dx = 0$, găsim

$$0 = \delta(1 - \cos\alpha l)$$

$$0 = \alpha\delta\sin\alpha l$$

care nu pot fi satisfăcute în acelaş timp decât de

$$\alpha l = 2\pi$$

care ne duce la valoarea sarcinei critice de flambaj

$$P_f = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

106. **Flambaj cu încovoiere.** Să luăm grinda articulată la cele două capete, supusă la flambaj cu sarcina P şi la încovoiere cu o sarcină Q la mijlocul ei. (fig. 184). Momentul încovoietor va fi în acest caz

$$M = Py + \frac{Q}{2}x$$

ceea ce ne duce la ecuaţia axei deformate

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Py - \frac{Q}{2}x$$

şi la aceiaşi soluţie ca şi în cazurile precedente

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x - \frac{Q}{2EI}x$$

Pentru constantele de integrare vom scrie condiţiile pe reazeme. Pentru $x = 0$ avem $y = 0$, ceea ce ne dă $A = 0$. Pentru $x = l$ avem $y = 0$, adică

$$0 = B\sin\alpha l - \frac{Q}{2EI}l$$

Aceasta ne duce la

$$y = \frac{Ql}{2EI}\left(\frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha l} - \frac{x}{l}\right)$$

şi y va fi înfinit, oricare ar fi celelalte valori, când

$$\sin\alpha l = 0, \quad \alpha l = \pi$$

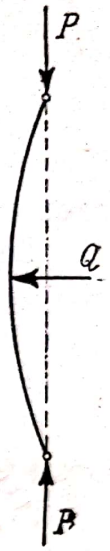


Fig. 184

ceeace ne duce la sarcina critică de flambaj

$$P_f = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

care este aceiaşi ca şi în cazul *a*. Rezultă deci că flambajul se produce, ori care ar fi sarcina Q, în caz când întrecem sarcina critică de flambaj. Cu alte cuvinte flambajul este indepedent de încovoiere.

107. Critica formulei lui Euler. Euler a stabilit formula sa în urma cercetărilor sale analitice asupra formei liniei elastice . Practicienii au căutat să verifice, dacă rezultatele calculului se potriveau cu experienţa. Incărcând felurite bare, s'a constatat că sarcinile de rupere observate nu corespundeau totdeauna cu sarcinile de flambaj calculate.

La această nepotrivire, datorită de altfel şi modului de rezemare al probelor, se mai adaugă încă o nelămurire. Până acum noi am judecat materialul cu ajutorul rezistenţelor, explicând ruperea prin faptul că rezistenţa a întrecut limita de rupere, pe când la flambaj nu se poate exprima rezistenţa.

Dacă vom căuta să exprimăm rezistenţa, vom numi *rezistenţa la flambaj*

$$\sigma_f = \frac{P_f}{\Omega} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

în care am introdus raza de giraţie a secţiei scoasă din relaţia $I_{min} = \Omega r^2$, în care termenul

$$\lambda = \frac{l}{r}$$

joacă un rol important şi se numeşte *coeficient de subţirime.*

Se vede de aci că pentru a păstra rezistenţa în limite admisibile, trebue să lucrăm asupra coeficientului de subţirime. Lungimea de flambaj a piesei şi momentul de inerţie minim sunt elementele importante

Prin experienţă s'a căutat să se găsească relaţia între aceste elemente. *Tetmajer* care a strâns rezultatele experienţelor sub o formă definitivă, a stabilit că formula de mai sus dă rezultate, care se verifică prin experienţă pentru bare lungi şi subţiri în care coeficientul de subţirime λ depăşeşte o anumită valoare. Sub această valoare nu mai putem întrebuinţa formula lui Euler şi forma cea mai simplă ce ar putea grupa rezultatele experimentale ar fi o linie dreaptă (fig. 185).

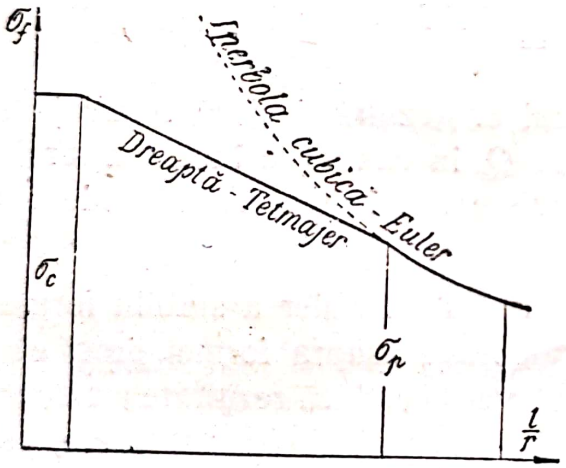


Fig. 185

Aceasta îl îndreptăţeşte pe Tetmajer să dea formula liniară pentru calculul rezistenţei de flambaj

$$\sigma_f = a - b\lambda$$

în care a şi b sunt coeficienţi găsiţi prin încercări experimentale pentru fiecare material.

Formula lui Tetmajer se întrebuinţează pentru valori $\lambda \geq 100$. Pentru cazul când înălţimea piesei scade din ce în ce mai mult, ne apropiem de rezistenţa la compresiune, când materialul poate fi încărcat până la limita de curgere. Astfel pentru cub, la care $\lambda = \sqrt{12} = 3{,}46$, calculăm numai la compresiune.

Formula lui Tetmajer având nevoie de coeficienţi greu de determinat pentru marea varietate de materiale şi numeroase experienţe pentru stabilirea şi verificarea lor, s'a întrodus mai cu greu în practică, deşi a fost prevăzută de normele şi regu-

lamentele oficiale, şi se preferă formula lui Euler, mai uşor de mânuit

Exemplu. Un stâlp de lemn trebue să suporte o sarcină $P = 25\,t$ şi are o înălţime de 4,15 m. Să se calculeze secţia necesară.

Vom lua rezistenţa la flambaj pentru lemn după Tetmajer

$$\sigma_f = 293 - 1{,}94\,\lambda = 293 - 1.94 \times 50 = 202 \text{ kg/cm}^2$$

admiţând deocamdată $\lambda = 50$.

Cu coeficientul de siguranţă $s = 5$, secţia este

$$\Omega_{nec} = \frac{P\,s}{\sigma_f} = \frac{25000 \times 5}{202} = 620 \text{ cm}^2$$

ceea ce ne dă, pentru secţia patrată $a = 24{,}8$ cm.

Alegem $a = 25$ cm şi vom avea

$$I = 32552 \text{ cm}^4,\ r^2 = \frac{I}{\Omega} = \frac{82552}{625} = 52$$

$$\lambda = \frac{l}{r} = \frac{450}{7{,}21} = 62{,}4$$

pentru această valoare avem

$$\sigma_f = 293 - 1{,}94 \times 62{,}4 = 172 \text{ kg/cm}^2$$

aşa că vom avea un coeficient de siguranţă

$$s = \frac{\Omega\,\sigma_f}{P} = \frac{625 \times 172}{25000} = 4{,}3$$

S'au propus şi alte formule pentru flambaj.

Astfel *Rankine* consideră flambajul ca o încovoiere în care sarcina ar avea o excentricitate e, aşa că atunci

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} + \frac{P\,e\,a}{I}$$

el admite pentru excentricitatea necunoscută o valoare

$$e = \frac{k\,l^2}{a}$$

şi atunci

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} + \frac{P\,k\,l^2}{\Omega\,r^2}$$

din care se scoate

$$P = \frac{\sigma\,\Omega}{1 + k\left(\frac{l}{r}\right)^2} = \frac{\sigma\,\Omega}{1 + k\lambda^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care σ este rezistenţa la compresiune iar k este un coeficient experimental depinzând de material. Formula lui Rankine este întrebuinţată în cărţile de limbă engleză.

Johnson propune o altă formulă

$$P = \sigma \Omega (1 - k \lambda^2)$$

Aceste diferite formule au fost întrebuinţate, dar treptat s'a generalizat întrebuinţarea formulei lui Euler.

108. **Formule de dimensionare.** Pentru a dimensiona piesele supuse la flambaj, şi pentru a verifica sarcina ce o piesă poate suporta, se întrebuinţează formula lui Euler, care este îndemânatică. Pentru calculul practic s'au făcut şi oarecare simplificări.

Astfel pentru oţel, luând $E = 2100000$ kg/cm², $s = 3{,}5$ găsim

$$I_{nec} = \frac{P s l^2}{\pi^2 E} = \frac{3{,}5}{10 \times 2100000} P l^2$$

dacă luăm P în tone şi l în metri, vom avea

$$I_{nec} = \frac{3{,}5 \times 10^3 \times 10^4}{10 \times 2{,}1 \times 10^6} P l^2 = 1{,}66 P l^2$$

pe când dacă luăm $s = 4$, avem

$$I_{nec} = 1{,}90 P l^2$$

la care corespund formulele de verificare

$$P = 0{,}6 \frac{I}{l^2} \quad , \quad P = 0{,}53 \frac{I}{l^2}$$

Pentru coloane de fontă, luând $E = 1000000$ kg/cm², $s = 8$ găsim

$$I_{nec} = \frac{8 \times 10^3 \times 10^4}{10 \times 10^6} P l^2 = 8 P l^2 \quad , \quad P = 0{,}125 \frac{I}{l^2}$$

Pentru lemn, luând $E = 100000$ kg/cm², $s = 10$ avem

$$I_{nec} = \frac{10 \times 10^3 \times 10^4}{10 \times 10^5} P l^2 = 100 P l^2 \quad , \quad P = 0{,}01 \frac{I}{l^2}$$

In toate aceste formule practice nu mai avem respectată omogeneitatea. Ele nu sunt valabile pentru orice unităţi, ci numai pentru P în tone, l în metri, I în cm⁴.

Scanned with OKEN Scanner

109. Coeficientul de flambaj. Pentru a înlesni calculul şi pentru a introduce din nou expresiunea rezistenţei se poate raţiona în felul următor

Flambajul constă în faptul că o sarcină critică produce deformaţii mari, periculoase. Pentru a evita flambajul micşorăm sarcina sau mărim secţia. Se poate lucra şi asupra rezistenţei pentru a avea un calcul asemănător cu cel de la compresiune şi întindere.

Dacă bara ar fi comprimată am pune condiţia de rezistenţă, adică rezistenţa la compresiune să fie mai mică de cât rezistenţa admisibilă

$$\sigma_c = \frac{P}{\Omega} \leq \sigma_a$$

La flambaj vom spune că rezistenţa este

$$\sigma_f = \frac{P}{\Omega_f}$$

în care vom lua $\Omega_f = n\ \Omega$, ceea ce înseamnă a lua

$$\sigma_f = \frac{\sigma_c}{n}$$

Acest coeficient n, numit *coeficientul de flambaj*, atârnă de felul materialului şi de coeficientul de subţirime, căci el rezultă din formula lui Euler

$$\sigma_f = \frac{P}{\Omega} = \frac{\pi^2 E}{s\,\lambda^2}, \quad n = \frac{\sigma_c}{\sigma_f} = \frac{\sigma_c\, s\,\lambda^2}{\pi^2 E}$$

Această metodă de calcul este recomandată de prescripţiile germane, pentru construcţiile metalice, sub forma numită *metoda* ω. Un coeficient ω, care depinde de material şi de coeficientul de subţirime, este dat de table şi calculul se face sub condiţia

$$\sigma_f = \frac{\omega\ P}{\Omega} \leqq \sigma_a$$

în care σ_a este rezistenţa admisibilă la compresiune. Tabelele au la bază un coeficient de siguranţă $s = 3{,}5$ pentru construcţiile metalice.

Exemplu. Uu stâlp metalic suportă o sarcină $P = 45$ *t*, lungimea lui este $l = 3{,}85$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Alegem 2 ⊏16, care are $I_x = 2 \times 605 = 1210$ cm⁴, $\Omega = 2 \times 24 = 48$ cm². Coeficientul de subţirime este

$$\lambda = \frac{l}{r} = \frac{385}{\sqrt{\frac{1210}{48}}} = \frac{385}{5{,}01} = 77$$

pentru acest λ găsim în table $\omega = 1{,}52$, deci

$$\sigma_f = \frac{\omega P}{\Omega} = \frac{1{,}52 \times 45000}{48} = 1420 \text{ kg/cm}^2$$

suntem în limitele prevăzute, admiţând pentru rezistenţă $\sigma_a = 1400$ kg/cm²

110. Flambaj prin încovoiere. Flambajul se poate produce totdeauna când este compresiune, deci şi în zona comprimată într'o piesă supusă la încovoiere, atunci când deplasarea este liberă şi se poate face. Aşa este cazul la grinzi cu inimă subţire şi înaltă, la grinzi de lemn făcute din scânduri, la ori ce fel de construcţie unde părţile comprimate sunt subţiri şi se poate produce deplasarea laterală.

In secţia supusă la încovoiere putem afla rezultanta rezistenţelor din regiunea comprimată care este

$$N = \int_o^a \sigma \, d\Omega = \frac{\sigma_{max}}{a} \int_o^a y \, d\Omega = \frac{M S_x}{I}$$

în care M este momentul încovoietor în secţie, S_x este momentul static al părţii comprimate faţă de axa neutră, I momentul de inerţie al secţiei.

Această forţă variază cu momentul încovoietor, descrescând spre reazeme unde este nulă. Putem deci considera piesa ca în cazul *d*, înţepenită la ambele capete şi încărcată cu o sarcină variabilă N.

Experienţa arată că la secţiile cu inima subţire şi înaltă, când cele două momente de inerţie diferă foarte mult, unul din ele, de exemplu I_y fiind foarte mic, se produce din cauza încovoierii o ieşire a axei grinzii din planul forţelor, planul vertical, adică o răsucire a secţiei în jurul axei, aşa cum se poate vedea cu un teu îndoit. Din cauza aceasta se produce o deplasare laterală care aduce un fenomen de nestabilitate asemănător flambajului.

Dacă φ este unghiul de răsucire avem relaţia

$$d\varphi = \frac{M_t}{G I_p} d x$$

Scanned with OKEN Scanner

pe când momentul încovoietor M_i dă o componentă după axa importantă

$$M_z = M_i \sin \varphi = M_i \varphi$$

şi deci

$$E I_z \frac{d^2y}{dx^2} = - M_z = - M_i \varphi$$

Aflarea unghiului φ ne duce la o ecuaţie asemănătoare cu acelea ale flambajului şi la aceleaşi concluzii: Secţia cedează la o sarcină critică, sub această valoare având numai deformaţii elastice proporţionale cu sarcina; dacă. se împedică deplasarea laterală a grinzii, deci răsucirea secţiei se poate mări momentu încovoietor sau sarcina de pe grindă.

Normele de construcţii prevăd regulile practice pentru a întări secţiile, cum este cazul inimii subţiri la grinzile metalice, căci calculul exact este mai complicat.

111. **Calculul stâlpilor cu zăbrele.** In cazul când avem o construcţie supusă la compresiune, a cărei secţie este formată din mai multe elemente, atunci trebue să le legăm între ele, pentru a asigura pentru fiecare lungimile minime de flambaj, dacă există posibilitatea de deplasare laterală.

In general deşi piesele sunt legate prin diferite îmbinări, nituire sau sudură, se admite cazul *a*), adică piesa articulată la ambele capete. Lungimea de flambaj ce se socoteşte în calcul este în general lungimea axei piesei, sau până la intersecţia cu axele pieselor cu care se leagă.

Momentul de inerţie al secţiei se ia în totdeauna după axa care ne dă I_{min} şi după această axă se socoteşte şi raza de giraţie r_{min}, precum şi coeficientul de subţirime λ. Nu se admit la construcţii metalice piese cu $\lambda > 250$; la celelalte materiale este admis să nu se depăşească $\lambda > 150$.

In caz când secţia nu se poate compune dintr'o singură piesă, ea se face din mai multe bare legate între ele. In acest caz se cere ca fiecare din bare să suporte sarcina ce-i revine şi sub această sarcină să nu se producă flambajul.

Din cauză că flambajul este un caz de echilibru nestabil, nu se poate admite că sarcina se repartizează uniform pe diferitele bare. Deaceia în caz când secţia este formată din două

Scanned with OKEN Scanner

bare, se ia pentru una din bare 70% din sarcină ; în caz când secţia este formată din patru bare, se ia pentru una din bare 35% din sarcină.

La aceste secţii compuse din mai multe bucăţi una din axele principale ale secţiei se poate să nu taie materialul. Se obişnuieşte ca să se dea un spor momentului de inerţie faţă de această axă. Se recomandă un spor de 10%, şi se ia astfel totdeauna I_{min} faţă de axa care taie materialul secţiei. Normele pentru construcţii metalice prevăd dispoziţii pentru acest caz, pentru calculul coeficientului de subţirime.

Fiecare din barele care compun secţia trebue să reziste la flambaj sub sarcina sporită ce-i revine şi luând în calcul I_{min} faţă de axele ei proprii. La construcţii metalice se prevede că coeficientul de subţirime al unei bare, calculat cu lungimea de flambaj şi I_{min} ce-i revin, trebue să fie $\lambda < 50$.

Dimensionarea secţiei, adică aflarea I_{nec} se face uşor cu formula lui Euler. In caz când suntem în domeniul Tetmajer, se întrebuinţează această formulă. Se dau pentru diferitele cazuri practice, în diferite manuale, formule practice de dimensionare.

In orice caz, după dimensionare, trebue dovedit că piesa rezistă la flambaj, fie calculând rezistenţa la flambaj, fie coeficientul de siguranţă ce obţinem.

In caz când secţia este formată din mai multe bare, acestea trebuesc legate între ele prin zăbrele sau plăci, la construcţii metalice sudate sau nituite, prin diferite legături cu buloane la cele ce lemn. Distanţa între legături este dată de lungimea minimă de flambaj necesară pentru rezistenţa unei bare. Zăbrelele urmează să fie calculate. Ele rezistă la lunecarea longitudinală sau la forţa tăietoare produsă prin încovoiere. Se poate afla forţa tăietoare echivalentă deformaţiei de încovoiere produsă, sau se poate admite o anumită valoare pentru această forţă tăietoare. Prescripţiile şi normele pentru diferite construcţii dau indicaţii în această privinţă.

Exemplu. Un stâlp trebue să suporte o sarcină $P = 45 t$ şi are o înălţime $h = 4{,}50$ m.

Vom alege un stâlp din fiare profilate şi cu $s = 3.5$ vom dimensiona cu formula Euler

$$I_{neces} = \frac{P\ s\ l^2}{\pi^2\ E} = \frac{45000 \times 3{,}5 \times 450^2}{\pi^2 \times 2100000} = 1470\ \text{cm}^4$$

alegem 2 ⊏ 16, cu $I = 2 \times 925$ cm⁴.

Verificăm dacă suntem în domeniul Euler

$$r = \sqrt{\frac{2 \times 025}{2 \times 24}} = 6{,}2, \quad \lambda = \frac{450}{6{,}2} = 73$$

suntem deci în domeniul Tetmajer, $\lambda < 100$.

Vom mări secţia luând 2 ⊏ 18, pentru care avem

$$I = 2 \times 1350 \text{ cm}^4, \quad \Omega = 2 \times 28 \text{ cm}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{1350}{28}} = 6{,}95, \quad \lambda = \frac{450}{6{,}95} = 64{,}7$$

la care corespunde $\omega = 1{,}32$, deci avem rezistenţa la flambaj

$$\sigma_f = \frac{\omega P}{\Omega} = \frac{1{,}32 \times 45000}{2 \times 28} = 1070 \text{ kg/cm}^2$$

deci sub $\sigma_a = 1200$ kg/cm² şi dimensionarea este bună,

Cele două fiare trebuesc legate prin plăci. Un singur fier va suporta $P' = 0{,}7 \; P = 0{,}7 \times 45 = 31{,}5$ t iar lungimea lui liberă de flambaj va fi

$$l'^2 = \frac{\pi^2 E I}{s P'} = \frac{\pi^2 \times 2100000 \times 114}{3{,}5 \times 31{,}5} = 2190$$

de unde $l' = 47$ cm. La această lungime corespunde

$$\lambda = \frac{l'}{r} = \frac{47}{2{,}02} = 23{,}4$$

adică prea mic faţă de $\lambda = 50$ admis de norme. Legăturile trebuind să fie aşezate la distanţe egale, dacă admitem 7 legături vom avea 6 intervale de $e = 450 : 6 = 75$ cm. La acesta corespunde

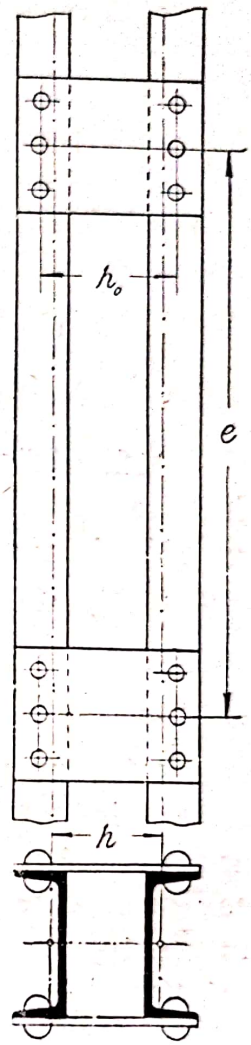


Fig. 186

$$\lambda = \frac{75}{2{,}02} = 37{,}1, \quad \omega = 1{,}09$$

şi deci în unul din fiare vom avea rezistenţa

$$\sigma_f = \frac{\omega P'}{\Omega} = \frac{1{,}09 \times 31500}{28} = 1220 \text{ kg/cm}^2$$

Vom aşeza fiarele la distanţa $a = 100$ mm, aşa fel ca I_y să fie mai mare ca I_x

$$I_y = 2 \; (114 + (5 + 1{,}92)^2 \times 28) = 2 \times 1454 \text{ cm}^4$$

distanţa între nituri va fi deci $h_o = 100 + 70 = 170$ mm.

Vom pune pe fiecare placă câte trei nituri.

Cap. XII. Grinzi cu zăbrele

112. **Sisteme articulate.** Se fac construcţii din sisteme de bare legate între ele şi care poartă numele general de *grinzi cu zăbrele.* Barele sunt de obicei legate la capetele lor, fie prin articulaţie, adică aşa fel în cât rotaţia lor este posibilă, fie prin legături rigide, care nu permit rotaţia.

In primul caz avem sistemele articulate, în care barele articulate deci libere să se rotească în jurul acestor articulaţii nu pot lua momente. Izolând deci o bară şi restabilind forţele ce lucrează în articulaţii, dacă pe bară nu mai avem alte sarcini urmează că ea va lucra la întindere sau compresiune, căci echilibrul cere ca cele două forţe să fie egale şi direct opuse. In general se admite că sarcinile nu lucrează pe bare ci în punctele lor de legătură, în articulaţii, care se numesc *noduri.*

Cel mai simplu sistem articulat este triunghiul, format din trei bare legate între ele prin articulaţii. Putem să compunem o figură din triunghiuri, legând fiecare punct prin două bare la alte puncte ale sistemului. Putem să avem un sistem articulat plan, când toate barele sunt situate în acelaşi plan, sau un sistem articulat în spaţiu. Ne vom ocupa numai cu grinda cu zăbrele în plan.

Când o grindă este întocmită astfel dintr'un sistem de bare articulate, se obişnueşte a se numi conturul dela partea de sus *talpa superioară,* tot aşa la partea de jos *talpa inferioară,* barele ce leagă tălpile sunt *diagonale,* dacă au o poziţie oarecare, şi *verticale* sau *montanţi,* dacă poziţia lor este verticală.

Sistemele articulate întrebuinţate în construcţii trebue să aibă numărul de bare necesar, legate aşa fel prin noduri, în cât barele să fie fixe, sau cum se spune, sistemul să fie rigid.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta înseamnă că distanţa între noduri este fixă, şi nu putem avea de cât deformaţiile elastice datorite materialului barelor.

Se întrebuinţează şi sisteme articulate în care barele sunt mobile. Acestea sunt mecanismele întrebuinţate la maşini şi la care se urmăreşte mişcarea lor, deci proprietăţile cinematice. Sistemele mobile au mai puţine bare, permiţând mişcarea cu unul, două sau mai multe grade de libertate. Cel mai simplu exemplu este sistemul bielă-manivelă, provenit din legătura a două bare, cu un punct mobil pe o dreaptă. Paralelogramul lui Watt, diferitele sisteme de comenzi ale saltarelor şi supapelor, sunt exemple cunoscute mecanicilor.

Sistemele de bare cu legături rigide se întrebuinţează şi ele în construcţii şi se întâlnesc la construcţiile în beton armat sau la marile construcţii metalice. Calculul lor este mai dificil şi nu ne vom ocupa de el, formând obiectul cursurilor speciale de construcţii. Câte o dată se calculează într'o primă aproximaţie sistemul ca fiind articulat şi se determină pe urmă corecţiile ce trebuesc aduse prin faptul rigidităţii nodurilor, ceea ce se numeşte *eforturi secundare.*

113. Noduri şi bare, sarcini şi eforturi. Un sistem de bare articulate în noduri este supus la diferite sarcini, ce se admit în general că lucrează numai în noduri. Pe lângă aceasta grinda cu zăbrele astfel formată trebue rezemată. Nu vom lua în considerare de cât rezemarea static determinată, adică aceea care cere în plan trei reacţiuni.

Sarcinile ce lucrează asupra grinzii şi cu reacţiunile reazemelor sunt în echilibru, şi din cele trei ecuaţii de echilibru de care dispunem în plan aflăm cele trei reacţiuni. Ne închipuim cele trei reacţiuni ca trei bare, cu care am lega grinda în două noduri oarecare; două bare dau un reazem fix, a treia bară dă un reazem mobil.

Grinda cu zăbrele fiind în echilibru, fie care nod trebue să fie în echilibru. Barele ce concură într'un nod fiind articulate şi libere să se rotească, nu vom avea momente, şi echilibrul fiecărui nod se va scrie prin cele două ecuaţii de proecţie. Dacă deci izolăm un nod, tăind toate barele ce concură în acel nod, vom înlocui fiecare bară cu efortul axial ce lucrează, şi vom scrie două ecuaţii de echilibru pentru fiecare nod.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă deci grinda noastră are n noduri, vom putea scrie $2n$ ecuaţii de echilibru. Numărul necunoscutelor este b, adică numărul barelor, la care trebue să adăugăm cele trei reacţiuni ale reazemelor, adică numărul necunoscutelor va fi $b + 3$. Rezultă deci că pentru a putea afla eforturile în bare trebue să avem

$$2n = b + 3$$

Dacă numărul barelor este mai mic înseamnă că sistemul articulat este mobil.

Dacă numărul barelor este mai mare, nu mai putem afla eforturile în bare, avem mai multe necunoscute de cât ecuaţii, sistemul este static nedeterminat.

Aflarea eforturilor în bare se reazemă pe condiţiile de echilibru. Toate forţele ce lucrează asupra grinzii trebue să fie în echilibru, tot sistemul de forţe şi fiecare parte din el trebue să fie în echilibru, fiecare nod trebue să fie în echilibru, fie care bară trebue să fie în echilibru. Din scrierea acestor condiţii de echilibru în diferite feluri avem diferite mijloace pentru aflarea eforturilor în barele sistemului, când el este static determinat, adică avem îndeplinită condiţia de mai sus.

§ 1. Determinarea eforturilor în bare.

114. Metoda figurilor reciproce sau a lui Cremona. Este o metodă care ne dă grafic eforturile în bare, scriind echilibrul fiecărui nod. Pentru aceasta găsim un nod unde avem două bare, şi deci putem grafic descompune forţa ce lucrează în nod în două direcţii, aflând cele două componente care sunt tocmai eforturile în cele două bare. Acestea cunoscute trecem la nodul următor şi repetăm operaţia.

Pentru figura alăturată (fig. 187) avem forţele care lucrează în noduri şi desenăm poligonul forţelor. Cu ajutorul unui poligon funicular determinăm reacţiunile A, B, care închid poligonul, condiţie cerută de echilibru.

Dacă pornim de la nodul 1, în care avem două bare S_1 şi I_1, cunoaştem forţa care lucrează şi care este rezultanta forţelor A şi P_1 pe care o avem în poligonul forţelor. Ducând deci pa-

ralelele la direcţiile S_1 şi I_1 am găsit cele două eforturi. Parcurgând poligonul forţelor în sensul cuvenit găsim că S_1 apasă în nod, deci este compresiune, I_1 trage de nod, deci este tensiune.

Trecând la nodul 2, cunoaştem forţele S_1, P_2, deci vom putea afla cele două componente S_2, D_1 ducând paralelele. Găsim în acelaş mod că S_2 este compresiune şi D_1 compresiune.

Cunoscând pe I_1 şi D_1, putem trece la nodul 7 şi aflăm pe D_2, I_2.

In acelaş mod trecem la nodurile 3, 5, 4.

Când am ajuns la nodul 4, nu ne-a mai rămas decât o singură bară S_4, deci soluţia este dată, şi dacă această linie de închidere nu este paralelă cu bara S_4, adică poligonul nu se închide, înseamnă că am făcut o greşeală. Avem deci o probă a construcţiei noastre grafice, şi această probă se repetă, căci şi nodul 5 trebue să fie în echilibru, deci forţele ce lucrează în nod să formeze un poligon închis.

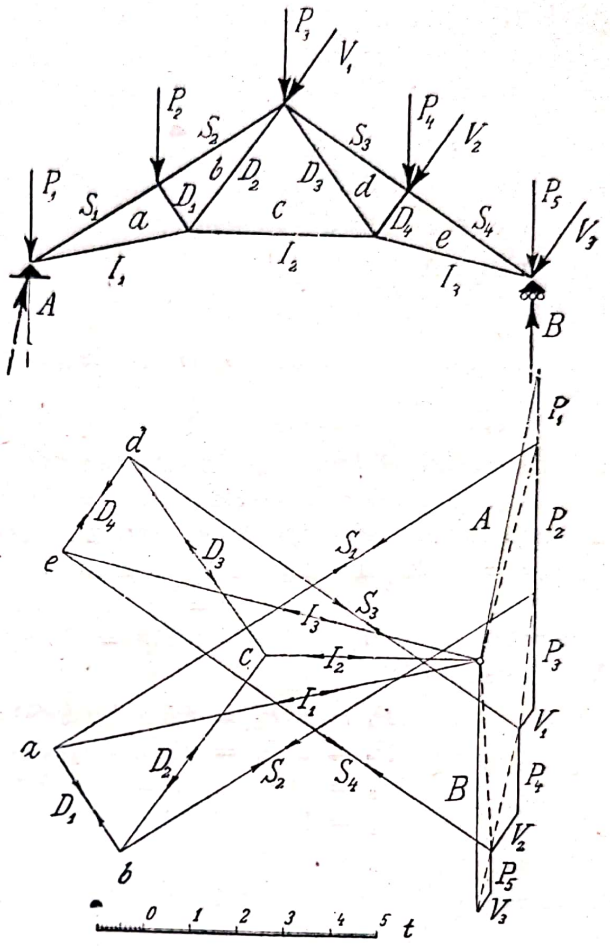


Fig. 187

Am parcurs deci figura după schema

noduri	1	2	7	3	6	4	5
bare	$S_1\ I_1$	$S_2\ D_1$	$D_2\ I_2$	$S_3\ D_3$	$D_4\ I_3$	S_4	proba

Prin urmare valorile eforturilor în bare se găsesc la scară în figura desenată, în care fiecare bară este paralelă cu cea din diagramă, forţele ce se întâlnesc într'un nod formează un poligon închis, iar barele ce formează un triunghiu se întâlnesc într'un punct. De aceea figura desenată se numeşte *figura reciprocă* a acelei date.

Pentru ca desenarea figurii reciproce să reuşească, trebuesc păstrate câteva reguli. Se notează nodurile şi barele şi se desenează poligonul forţelor. Se începe cu un nod unde sunt două bare şi se face verificarea închiderii la ultimul nod. Dacă nu se închide reciproca, ea se desenează din nou, sau dacă eroarea este mică se face compensaţia.

Se recomandă desenarea prin săgeţi a sensului în figură, iar în figura reciprocă barele se desenează cu o linie mai groasă sau dublă. Valorile eforturilor citite la scară se trec într'un tablou.

Figura 187 reprezintă o fermă de acoperiş formată din două grinzi metalice armate, şi care se numeşte ferma Polonceau. Este un acoperiş simplu care lasă deschiderea liberă, de aceia foarte întrebuinţat pentru săli de maşini, lăsând liberă mişcarea unei macarale.

Deschiderea fermei s'a luat $l = 18$ m. iar înălţimea ei $h = 6$ m distanţa între ferme fiind 5 m. Sarcina corespunzătoare la acoperiş de ţiglă $p = 80$ kg/m² de proecţie orizontală, pe partea stângă s'a aşezat o încărcare de zăpadă luată $p = 62$ kg/m² de proecţie orizontală, pe partea dreaptă presiunea vântului luată $p = 37$ kg/m² de suprafaţă lovită normal. Vom avea astfel

$$P_4 = 2\,P_5 = 4{,}5 \times 5{,}0 \times 80 = 18\,0 \text{ kg}$$
$$P_2 = 2\,P_1 = 4{,}5 \times 5{,}0\,(80 + 62) = 3200 \text{ kg.}$$
$$P_3 = 1800 + 700 = 2500 \text{ kg}$$
$$V_2 = 5{,}4 \times 5{,}0 \times 37 = 1000 \text{ kg.}$$

Cu aceste sarcini s'a desemnat reciproca, la scara figurii, şi la acelaş scară se citesc eforturile în bare Acestea se dimensionează pe urmă la tensiune sau la flambaj.

Metoda figurilor reciproce sau a lui Cremona este o metodă de calcul grafic foarte îndemânatecă pentru cazul sarcinilor permanente. Când sarcinile sunt mobile, întrebuinţarea acestei metode este mai grea. Exactitatea rezultatelor atârnă de execuţia desenului, de aceia se recomandă desenarea epurei cu mare îngrijire.

Exemplu. O aplicaţie simplă a metodei Cremona este calculul grinzi armate (fig. 188). In caz când deschiderea grinzii este prea mare ca să suporte sarcina se reazemă în mijloc pe un pop care la rândul lui este atârnat cu doi tiranţi, dând astfel grinda numită armată. Desenăm figura reciprocă şi putem scrie şi formulele

$$S_1 = \frac{P}{2} \cot \alpha$$

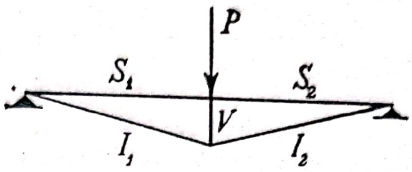
$$I_1 = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

$$V = P$$

O grindă de lemn trebue să suporte o sarcină $p = 500$ kg/ml şi are o deschidere $l = 8{,}00$ m. Vom avea

$$M = \frac{p\ l^2}{8} = \frac{500 \times 8 \times 800}{8} = 400000 \text{ kg cm}$$

$$W_{nec} = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{400000}{80} = 5600 \text{ cm}^3$$



şi nu găsim o secţie convenabilă de lemn care să aibă acest modul de rezistenţă.

Dacă însă armăm grinda ca în figură, atunci vom avea în nodul din mijloc o sarcină $P = 4{,}00 \times 500 = 2000$ kg, şi dacă alegem un pop de 0,50 m înălţime vom găsi

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{0{,}5}{4} = 0{,}125 \text{ deci } \alpha = 7^0\ 10'$$

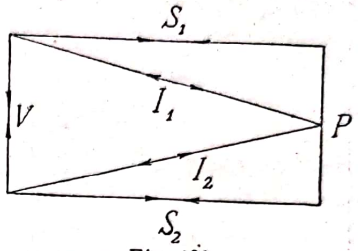


Fig. 188

şi atunci vom putea scrie

$$S_1 = \frac{P}{2}\cot\alpha = \frac{2000 \times 7{,}95}{2} = 7953 \text{ kg}$$

$$I_1 = \frac{P}{2 \sin\alpha} = \frac{2000}{2 \times 0{,}125} = 8064 \text{ kg}$$

$$V = P = 2000 \text{ kg}$$

Vom calcula grinda de sus la flambaj

$$I_{nec} = 100\, S_1\, l^2 = 100 \times 7{,}95 \times 8^2 = 50880 \text{ cm}^4$$

alegem o grindă de 28/28, care are $I_{min} = 51221$, dar care nu ar fi putut suporta liberă încovoierea având $W_{nec} = 3659$ cm³.

Tirantul de fier va fi calculat la întindere

$$\Omega_{nec} = \frac{I_1}{\sigma_a} = \frac{8064}{1200} = 7{,}63 \text{ cm}^2$$

alegem deci un tirant de $d = 30$ mm.

Popul fiind foarte scurt va fi dimensionat larg, din punct de vedere constructiv 25/25, pentru că dimensiile rezultate din calcul ar fi mici.

Pe lângă aceasta trebuesc calculate îmbinările între pop şi grindă precum şi modul de legătură al tirantului.

115. Metoda momentelor sau a lui Ritter. Să luăm o grindă cu zăbrele supusă la diferite sarcini ce lucrează în noduri şi să facem o secţie, întâlnind trei bare *S*, *D*, *I* (fig. 189).

Grinda fiind în echilibru şi fie care parte a ei deasemenea, pentru a afla eforturile în barele *S*, *D*, *I*, ne servim de ecuaţia

momentelor, luând momentul faţă cu punctul de întâlnire a

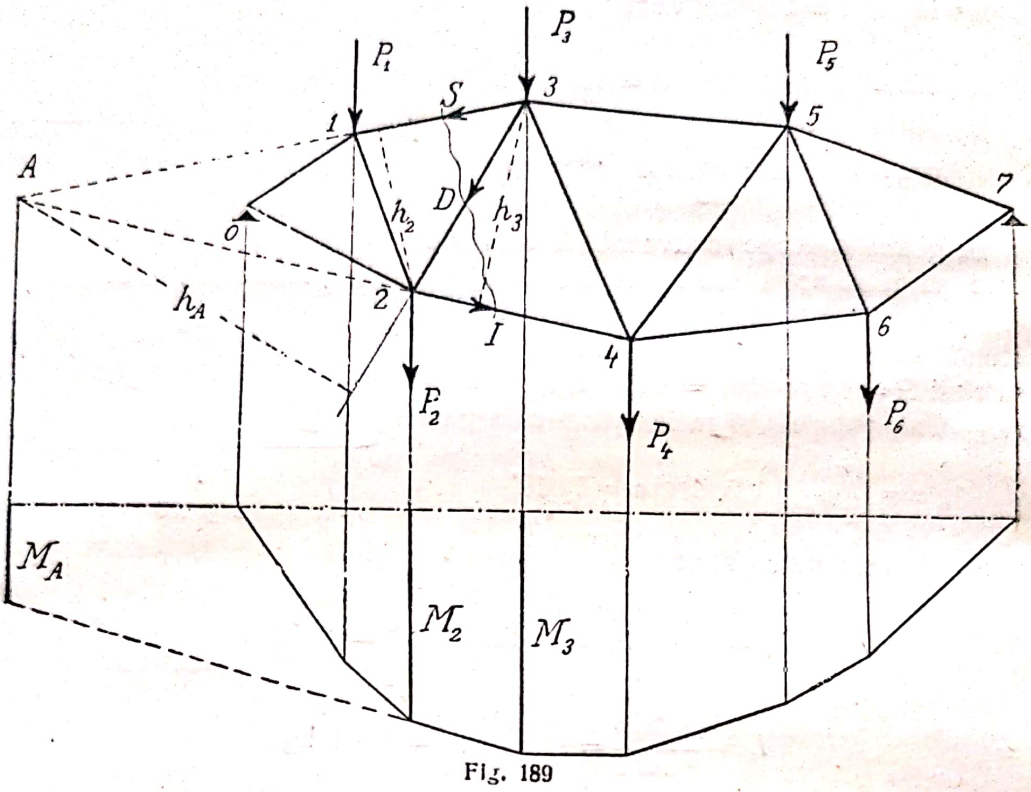


Fig. 189

două din bare, pentru a afla pe a treia. Avem astfel.

$$S\ h_2 = -\ M_2$$

$$I\ h_3 = M_3$$

$$D\ h_A = M_A$$

Momentele din membrul al doilea fiind momentele tuturor forţelor ce se găsesc la stânga secţiei, nu sunt alceva decât momentele încovoietoare, ce se pot găsi prin metodele cunoscute.

Pentru diagonală putem să scrim şi condiţia de proecţie care ne dă

$$D\cos\varphi + S\cos\alpha + I\cos\beta = O$$

cunoscând pe S şi I, şi înlocuind $h_2 = h'_2 \cos\alpha$, $h_3 = h'_3 \cos\beta$ în care h'_2, h'_3 sunt înălţimile ce se pot citi pe figură, avem

$$D\cos\varphi = \frac{M_2}{h'_2} - \frac{M_3}{h'_3}$$

Pentru a putea întrebuinţa această metodă trebue să nu întâlnim în secţie de cât trei bare. Ea ne permite să calculăm analitic efortul în bare din valorile momentelor încovoietoare

şi datele geometrice ale grinzii. Avantajul ei este că o putem întrebuinţa şi în cazul sarcinilor mobile, putând afla momentul maxim în nodul respectiv.

116. Metoda lui Culmann. Pornind tot de la o secţie care taie trei bare *S*, *D*, *I*, această metodă ne dă grafic eforturile în cele trei bare, scriind grafic condiţia de echilibru. Cele trei eforturi şi cu rezultanta forţelor ce lucrează asupra bucăţii trebue să fie în echilibru şi Culmann a dat construcţia grafică pentru descompunerea unei forţe după trei direcţii în plan.

Să luăm grinda (fig. 190) cu secţia care ne dă eforfurile *S*, *D*, *I*. Dacă luăm bucata din dreapta, rezultanta tuturor for-

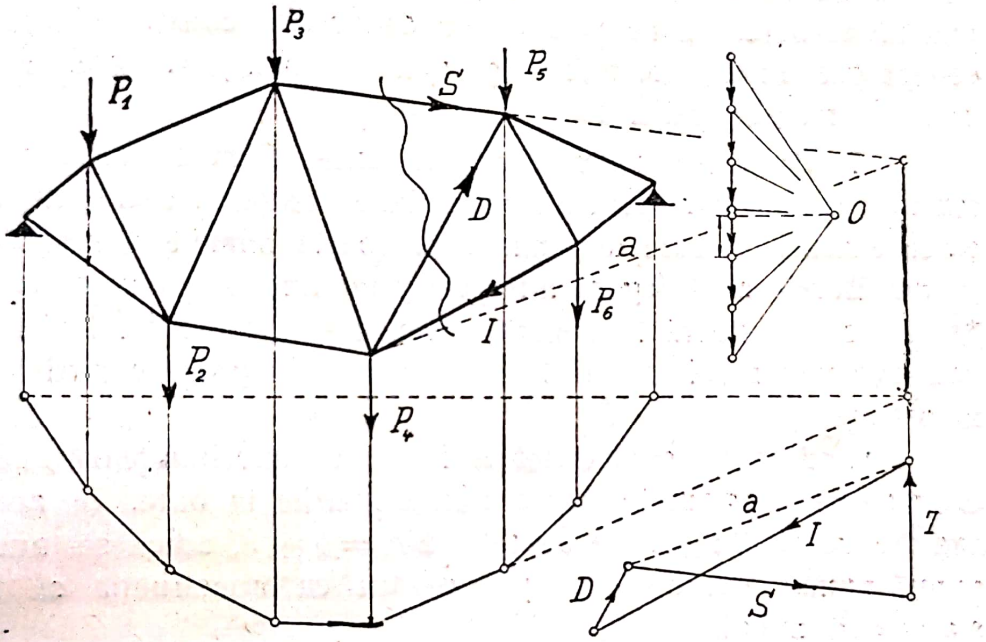


Fig. 190

ţelor ce lucrează asupra ei este *T* şi trece prin intersecţia laturilor respective ale poligonului funicular. Valoarea ei se citeşte în poligonul forţelor.

Vom descompune deci această forţă după cele trei direcţii prin construcţia cunoscută, servindu-ne de direcţia ajutătoare *a*. Descompunem întâi pe *T* după direcţiile *S* şi *a*, pe urmă descompunem componenta *a* după direcţiile *D* şi *I*, după cum se vede în figură.

Obţinem astfel la scară valorile eforturilor precum şi sensurile lor indicate în figură. Se vede că *S* şi *D* sunt compresiuni, iar *I* este tensiune.

Metoda lui Culmann este mai puţin îndemânatecă şi mai puţin întrebuinţată, Pentru a afla eforturile în toate barele trebue să facem mai multe construcţii, aflând pentru fiecare caz forţa T. Când sarcinile sunt mobile trebue să aflăm forţa maximă. Avantajul figurilor reciproce după Cremona este evident şi ele sunt preferate.

Metoda Culmann este întrebuinţată în cazuri de încărcare specială, când forţa T este una sau rămâne aceiaşi pentru mai multe secţii construcţia devenind mai simplă.

Pe lângă metodele date Cremona, Ritter şi Culmann se mai întrebuinţează şi alte metode pentru cazuri mai complicate sau când numărul barelor este mai mare aşa că o secţie întâlneşte mai multe bare. Nu ne vom ocupa de aceste construcţii, care se pot găsi în diferite tratate şi vom întrebuinţa de preferinţă cele trei metode indicate.

117. **Calculul fermelor de lemn.** Pentru acoperişuri, macaze, grinzi mari pentru poduri, hale, magazii, se întrebuinţează sisteme de bare de lemn, care poartă numele general de *ferme*. Barele sunt legate între ele prin îmbinări, cu praguri, dar ele se consideră în general articulate căci aceste îmbinări dau oarecare mobilitate şi în nici un caz nu pot fi considerate incastrate.

Având forma geometrică a fermei se întrebuinţează adese ori metoda Cremona pentru a afla eforturile în bare. In acest caz trebue să îndeplinim condiţia $2n = b + 3$, adică să avem numai numărul de bare necesar pentru ca construcţia să fie static determinată.

La fermele de lemn se pun însă deseori bare suplimentare, legături şi cleşti, proptele, necesare din punct de vedere constructiv, dar care se lasă la o parte în calcul, pentru a putea avea numărul de noduri necesar pentru o construcţie static determinată.

In cazurile simple nu se mai desenează figura reciprocă, ci se află eforturile în bare direct prin descompunerea sarcinilor ce lucrează în noduri şi scriind echilibrul nodurilor care ne interesează. In acest fel pe baza eforturilor calculate se dimensionează piesele. Barele comprimate se calculează la flambaj, pentru cele întinse trebue să avem în vedere totdeauna secţia netă, care rămâne după tăierea pragurilor necesare pentru legă-

Scanned with OKEN Scanner

turi. După dimensionarea pieselor se calculează şi îmbinările, cu care ocazie se pot face modificări sau aranjări mai convenabile ale pieselor, hotărând definitiv şi dimensiile lor.

Exemplu. Să calculăm ferma de acoperiş a unei case. Vom lua un acoperiş de ţiglă, iar deschiderea fermei $l = 12$ m, şi înclinările la 45° Sarcina se transmite prin căpriori la grinzile de scaun, aşezate la distanţe de 3 m în proecţie. Ferma are forma din figură.

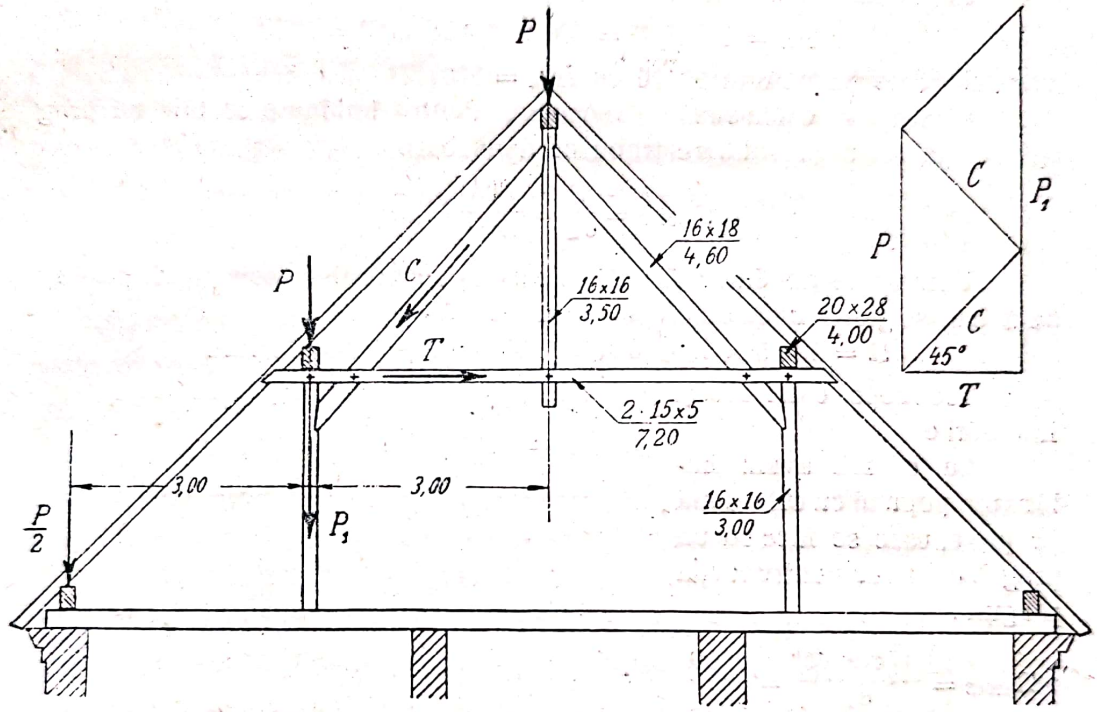


Fig. 191

Sarcina care revine la un nod, dacă admitem încărcarea uniformă, este sarcina de pe suprafaţa aferentă. Sarcina se compune din greutatea proprie a construcţiei, zăpadă, şi sarcini accidentale, vânt, etc., pe care o evaluăm $p = 350$ kg/m² de suprafaţă orizontală. Luând distanţa între ferme de 4,00 m vom avea

$$P = 4 \times 3 \times 350 = 4200 \text{ kg.}$$

Sarcina aceasta aplicată la coamă se împarte la cele două proptele, In nodul din stânga, popul va fi încărcat cu sarcina P, cu împingerea proptelei, cu tensiunea coardei. Vom avea deci

$$C = \frac{P}{2 \cos 45^0} = \frac{4200}{2 \cos 45^0} = 2970 \text{ kg}$$

$$T = C \cos 45^0 = 2970 \cos 45^0 = 2100 \text{ kg}$$

pe când compresiunea P_1 în popul din stânga va fi

$$P_1 = P + C \cos 45^0 = \frac{3}{2} P = 6300 \text{ kg.}$$

Descompunerea aceasta se poate face şi grafic dacă avem un caz mai complicat şi e indicată în figură,

Piesele supuse la compresiune, trebuesc calculate la flambaj.

Avem deci pentru proptea $l = \frac{3}{\cos 45^0} = 4{,}24$ m

$$I_{neces} = 100\, C\, l^2 = 100 \times 2{,}97 \times 4{,}24^2 \cong 5330$$

vom alege o grindă de lemn de secţie 16/18 cu $I_{min} = 6144$.

Popul de asemenea

$$I_{neces} = 100\, P_1\, l^2 = 100 \times 6{,}3 \times 3{,}00^2 = 5770$$

vom alege secţia patrată 16/16 cu $I_{min} = 5461$.

Cleştele se calculează la tensiune. Pentru îmbinare se taie un prag de 2 cm. Pentru consolidare trebuesc două bare

$$\Omega_{neces} = \frac{T}{\sigma_a} = \frac{2100}{100} = 21$$

Vom alege doi dulapi 5×15 din care dacă scădem cele două praguri de 2 cm, şi gaura unui bulon de 20 Φ, rămâne

$$\Omega = 2 \times 5 \times 15 - 2 \times 2 \times 15 - (3+3)\,2 = 78 \text{ cm}^2.$$

Trebuesc calculate şi îmbinările.

La coamă avem îmbinarea popului cu cele două proptele, care se face cu un prag. Vom avea pentru secţia pragului

$$\Omega_{neces} = \frac{C \cos 45^0}{\sigma_a} = \frac{2100}{80} = 26{,}2 \text{ cm}^2$$

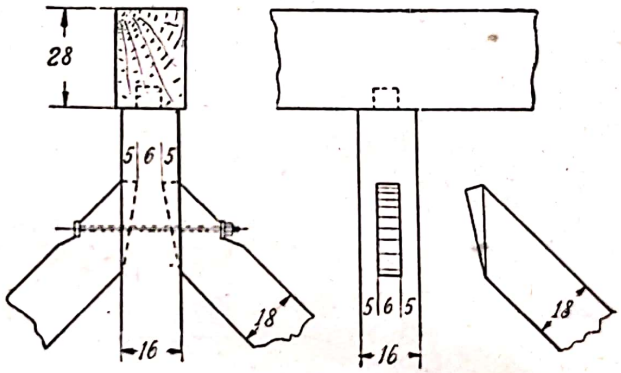


Fig. 192

Vom alege o adâncime de 5 cm, pe o lăţime de 6 cm, detaliul se vede în figură;

Imbinarea coardei cu propteaua şi popul se face cu praguri. Luăm praguri de 2 cm care sunt suficiente căci avem

$$\sigma = \frac{T}{\Omega} = \frac{2100}{2 \times 2 \times 15} = 35 \text{ kg/cm}^2$$

Se consolidează îmbinarea cu buloane cum se vede în figură. Imbinarea proptelei se face ca mai sus.

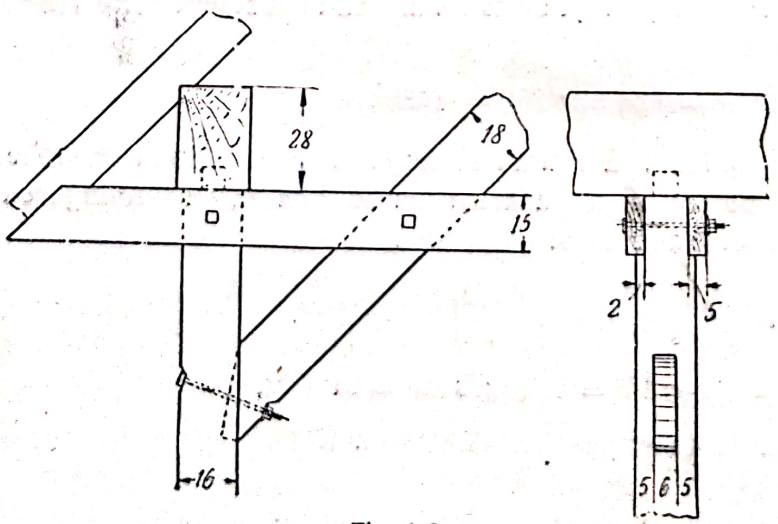


Fig. 1 3

Grinzile de scaun care susţin căpriorii se calculeaxă la o sarcină uniform distribuită P, Vom avea deci

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{4200 \times 400}{8} = 210000 \text{ kg/cm}$$

$$W = \frac{210000}{80} = 2620 \text{ cm}^3$$

Vom alege grinzi 20/28.

§ 2. Linii de influenţă la grinzi cu zăbrele.

118. Valorile eforturilor la sarcini mobile cu ajutorul liniilor de influenţă. Pentru cazul când avem sarcini mobile metoda figurilor reciproce nu ne poate da nici un rezultat, figura reciprocă schimbându-se mereu când sarcinile se mişcă pe grindă. Se întrebuinţează metoda Ritter pentru a obţine efortul în bare, datorit unei sarcini egală cu unitatea, care se plimbă pe grindă. Cu alte cuvinte căutăm linia de influenţă, care pe urmă ne ajută să aflăm efortul pentru un convoiu de sarcini mobil.

Pentru grinda cu zăbrele static determinată, rezemată pe două reazeme, valorile eforturilor în bare depind de momentul încovoietor. Momentul încovoietor variază liniar pentru sarcina mobilă care se plimbă pe grindă. Deci liniile de influenţă vor fi formate din segmente de linii drepte şi le vom putea desena cu uşurinţă.

119. Linia de influenţă pentru efortul în tălpi. Considerăm o grindă cu tălpi oarecare şi facem o secţie în vecinătatea nodului m, care taie trei bare S_m, D, I_{m-1}. Vom avea după metoda Ritter

$$S_m = -\frac{M_m}{h_m}, \quad I_{m-1} = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

Vom deduce deci linia de influenţă a efortului în talpa de sus S_m din linia de influenţă a momentului încovoietor M_m, împărţind cu h_m. Linia de influenţă a momentului încovoietor este dată de triunghiul, care taie pe verticala reazemului distanţa x_m. Deci linia S_m va avea forma triunghiului (fig. 194), care taie pe verticala reazemului distanţa $-x_m/h_m$. Luăm semnul negativ fiindcă ştim că efortul în talpa de sus este compresiune

Vom deduce linia de influenţă a efortului în talpa de jos, linia I_{m-1}, din linia de influenţă a momentului încovoietor M_{m-1}. Cum sarcina lucrează indirect, triunghiul va fi ciuntit cu dreapta dată de verticalele nodurilor. Ordonatele sunt împărţite cu h_{m-1},

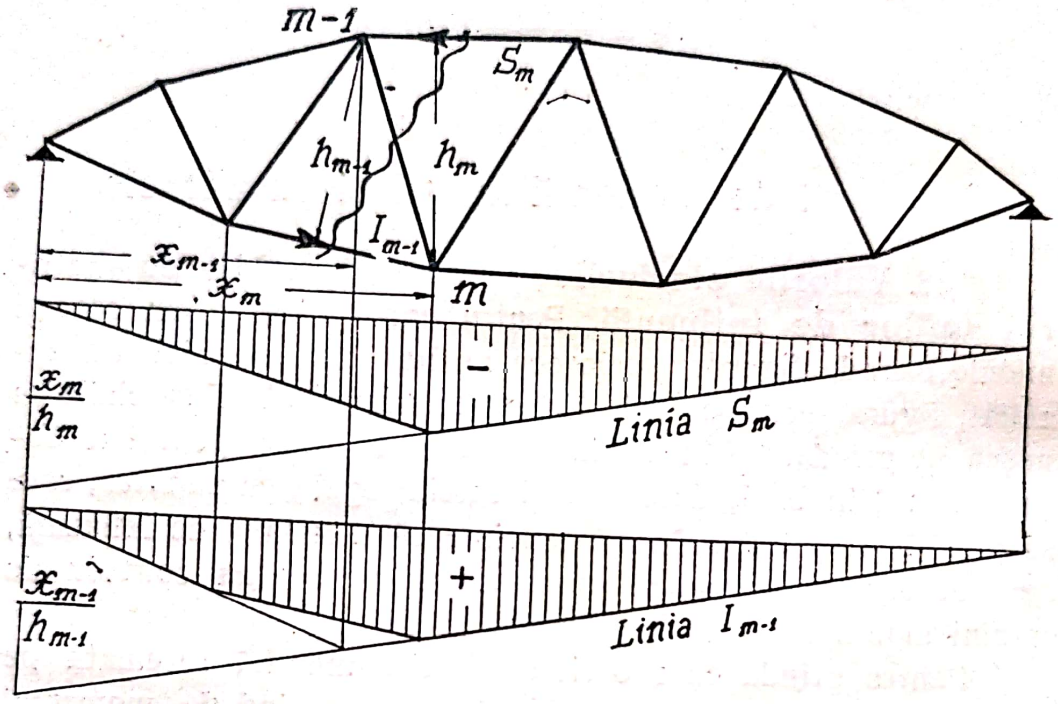


fig. 194

deci obţinem în verticala reazemului distanţa x_{m-1}/h_{m-1}. Luăm semnul pozitiv, căci ştim că efortul din talpa de jos este tensiune.

Pentru a obţine efortul maxim în tălpi va trebui deci să încărcăm cu convoiul mobil toată deschiderea, aranjând în aşa fel ca să obţinem valoarea maximă a momentului încovoietor în nodul considerat.

120. Linia de influenţă pentru efortul în diagonale. Considerăm în grinda noastră o secţie care taie o diagonală ce scoboară de la stânga spre dreapta. După metoda Ritter va trebui să luăm momentele faţă cu punctul i, în care se întâlnesc barele tălpilor. Vom avea deci, luând bucata din stânga (fig. 195)

$$D\,h_i = A\,x_i\,,\quad D = A\frac{x_i}{h_i}$$

vom deduce deci efortul în diagonală din linia A, în care vom înmulţi ordonatele cu raportul x_i/h_i.

Când sarcina cade în stânga secţiei, atunci vom lua momentele forţelor ce lucrează asupra bucăţii din dreapta, ceea ce ne dă

$$D h_i = - B x'_i \,, \quad D = - B \frac{x'_i}{h_i}$$

când vedem că se schimbă semnul şi obţinem partea de sus a liniei de influenţă.

In interiorul panoului variaţia este după linia dreaptă.

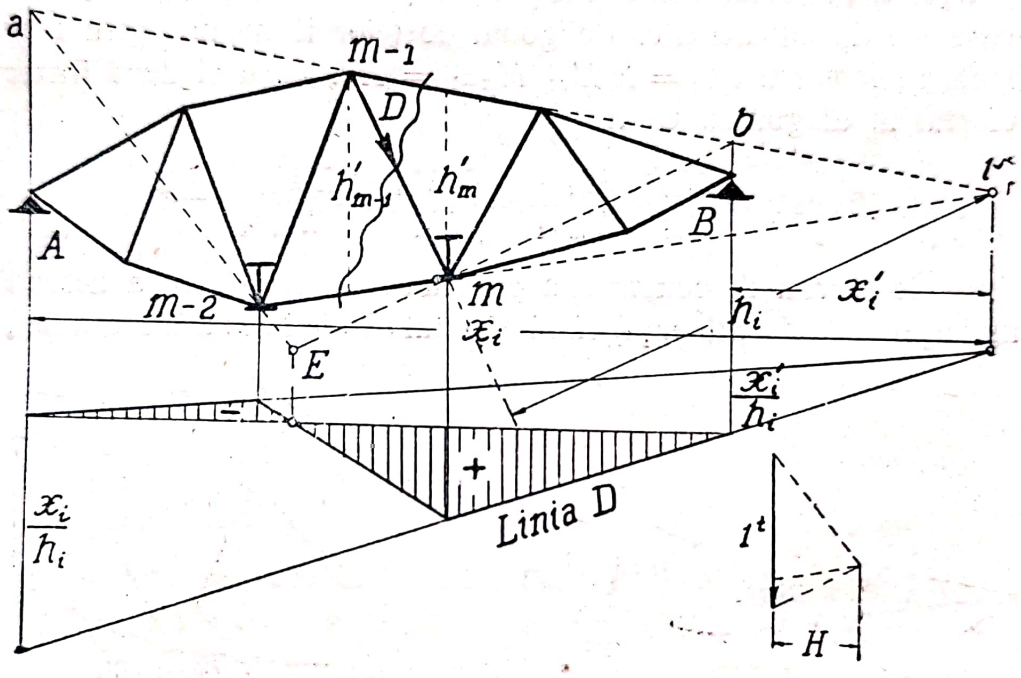


fig. 195

Cele două linii ale reacţiunilor A şi B se taie pe verticala punctului i, după cum se vede din asemănarea triunghiurilor

$$\frac{x'_i}{h_i} : \frac{x_i}{h_i} = x'_i : x_i$$

Ne putem servi de această construcţie pentru a duce numai dreapta care taie pe verticala reazemului segmentul x_i/h_i, şi pe urmă a doua linie prin punctul de intersecţie pe verticala lui i.

Se vede că pentru diagonala considerată efortul este tensiune când sarcina este la dreapta şi compresiune când sarcina este la stânga. Există un punct în panoul considerat, pentru care efortul în diagonală este nul când sarcina calcă în acest punct, numit pentru aceasta *punctul neutru*.

Pentru determinarea punctului neutru ne servim de o construcţie simplă.

Se prelungeşte bara de sus a tălpii neîncărcate, din secţia Ritter considerată, până când taie în a, b verticalele reazemelor. Unind aceste puncte cu nodurile panoului considerat obţinem punctul E. Când sarcina lucrează în E efortul în diagonala D este nul, deci E corespunde pe verticala punctului neutru.

Dacă considerăm conturul a, $m-2$, m, b vedem că este poligonul funicular corespunzător forţei, $a\,b$ linia de închidere care ne dă momentele. Poligonul forţelor îl avem desenat şi momentele vor fi $M_m = H\,h'_m$, $M_{m-1} = H\,h'_{m-1}$, deci după Ritter efortul în diagonală va fi

$$D\cos\varphi = \frac{M_m}{h'_m} - \frac{M_{m-1}}{h'_{m-1}} = \frac{H\,h'_m}{h'_m} - \frac{H\,h'_{m-1}}{h'_{m-1}} = 0$$

Ne servim de construcţia punctului neutru pentru a desena mai uşor linia de influenţă, când punctul i cade în afara desenului.

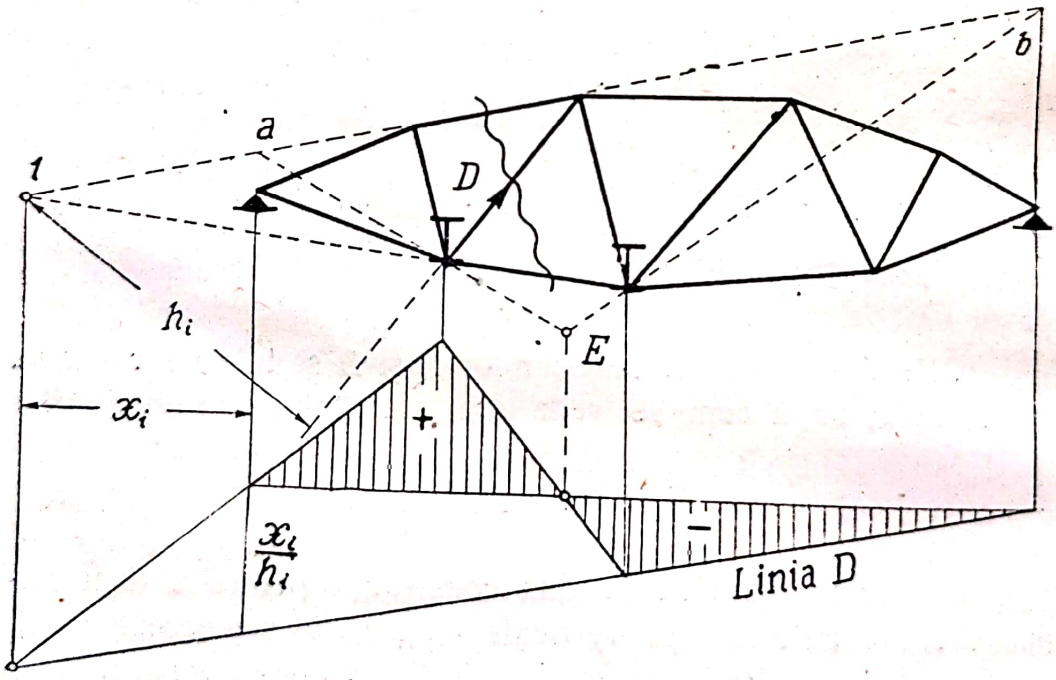


Fig. 196

Să considerăm o diagonală care urcă de la stânga spre dreapta (fig. 196). Vedem că luând bucata din stânga vom obţine pentru diagonala D semnul negativ, deci compresiune. Când sarcina calcă în stânga secţiei, atunci luând bucata din

dreapta vom obţine pentru diagonala D semnul pozitiv, adică tensiune. Construcţia liniei de influenţă a efortului în diagonala D urcătoare s'a făcut ajutându-ne de construcţia punctului neutru, pe figură se vede şi punctul i.

Se vede că linia de influenţă a diagonalei se deduce din aceea a reacţiunii, care este şi linia de influenţă a forţei tăietoare. Deci efortul în diagonală este produs de forţa tăietoare. Pentru a obţine maximul efortului în diagonală, trebue să încărcăm parţial grinda, numai pe porţiunea de acelaş semn, până în dreptul punctului neutru. Pentru o diagonală care scoboară de la stânga la dreapta obţinem tensiunea maximă când încărcăm de la punctul neutru până la reazemul din dreapta, şi compresiunea maximă când încărcăm dela reazemul din stânga până la punctul neutru. Lucrurile se prezintă invers pentru diagonala care urcă de la stânga spre dreapta.

Se întrebuinţează construcţii corespunzătoare când punctul neutru şi punctul E se determină mai greu, sau când punctul i este mai uşor de determinat (fig. 197). Se poate deasemena cal-

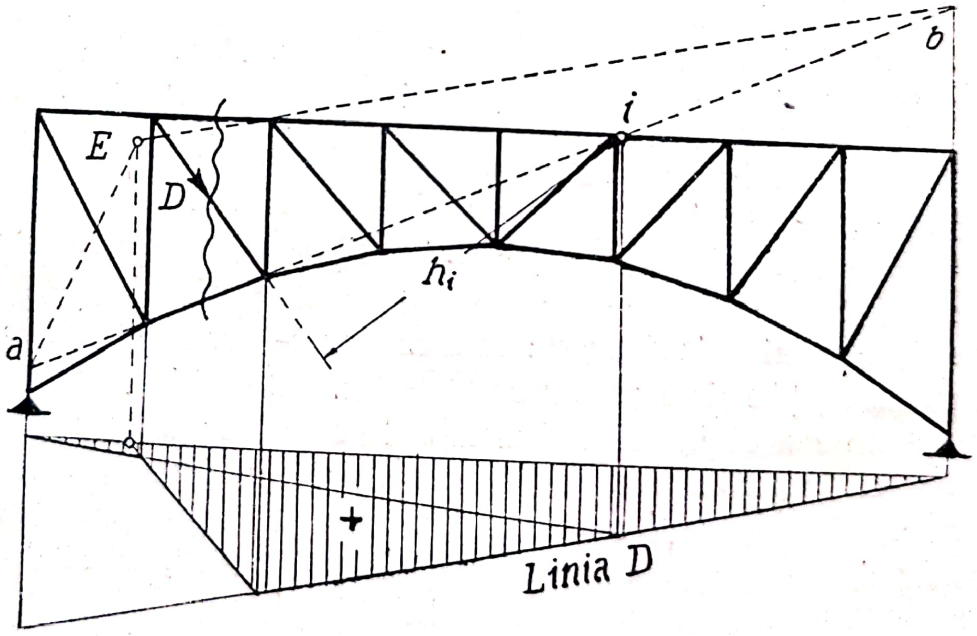


fig. 197

cula D pentru o poziţie a forţei care ne dă $A=1$ cu ajutorul reciprocei, şi pe urmă se determină linia de influenţă cu ajutorul punctului i.

121. Linia de influenţă pentru efortul în verticale. In cazul când grinda are bare verticale, montanţi, vom întrebuinţa aceiaşi metodă şi o secţie care taie montantul V, din nodul m ne va da (fig. 198).

$$V(x_i + x_m) = -A\,x_i$$

Deci linia cunoscută pentru reacţiunea A o vom înmulţi cu factorul $x_i/(x_i + x_m)$. Putem să ne servim de punctul neutru,

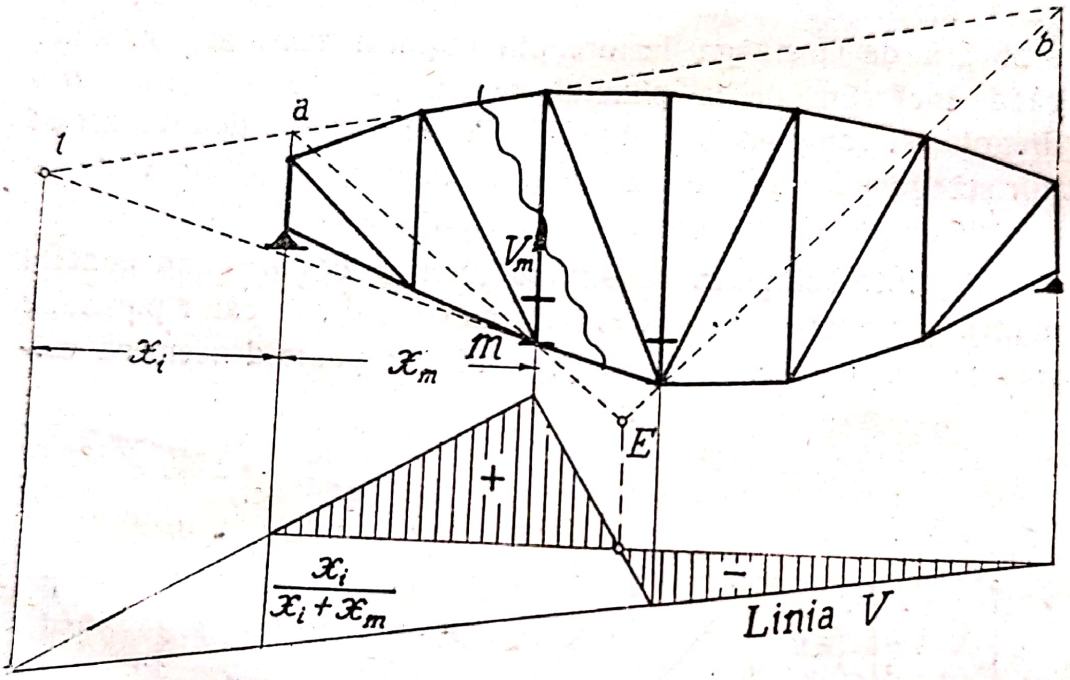


fig. 198

sau de punctul i dacă acesta este convenabil, sau de ori care din construcţiile date pentru linia de influenţă a diagonalei.

Pentru a obţine efortul maxim de compresiune în montant, trebue să încărcăm partea negativă a liniei de influenţă, de la punctul neutru până la reazemul din dreapta. Vom obţine efortul maxim de tensiune când încărcăm partea pozitivă, adică de la punctul neutru până la reazemul din stânga.

In concluzie se vede că valorile maxime ale eforturilor pentru tălpi se obţin pentru încărcarea pe toată grinda, pe când valorile maxime ale eforturilor în diagonale şi montanţi se obţin pentru încărcări parţiale numai pe o porţiune din grindă, deci pentru alte poziţii ca acelea care ne dau maximul în tălpi.

§ 3. Diferite grinzi cu zăbrele.

122. Grinda cu tălpi paralele. Pentru cazul grinzii cu tălpi paralele, (fig. 199) înălţimea fiind aceiaşi, vom avea prin metoda lui Ritter

$$S_m = -\frac{M_m}{h}, \quad I_m = +\frac{M_{m-1}}{h}$$

Pentru diagonală vom lua suma proecţiilor pe verticală, de oarece punctul de întâlnire al tălpilor paralele nu ne poate

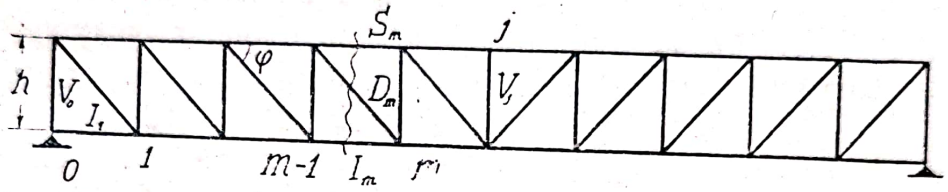


Fig. 199

servi. Suma proecţiilor forţelor ce lucrează până la nodul m este tocmai forţa tăietoare T_m şi deci

$$D_m \sin\varphi = T_m, \quad D_m = \frac{T_m}{\sin\varphi}$$

Aceste eforturi nu depind de poziţa căii, momentele şi forţele tăietoare pentru grinda noastră fiind aceleaşi, dacă avem calea la talpa de sus sau la talpa de jos.

Pentru montanţi trebue însă să facem această diferenţă. Pentru cazul când calea este jos, secţia noastră va cuprinde

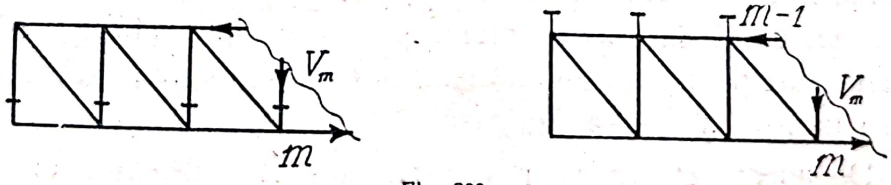


Fig. 200

nodul m, deci luând echilibrul pe verticală vom avea (fig. 200)

$$V_m = -T_{m+1}$$

pe când, dacă avem calea sus, secţia noastră se va referi la nodul $m-1$, deci vom avea

$$V_m = -T_m$$

Fac excepţie primul montant şi cel din mijloc. Pentru nodul 0 avem, $V_0 = -A$, $I_1 = 0$. Pentru nodul j, vom avea

Scanned with OKEN Scanner

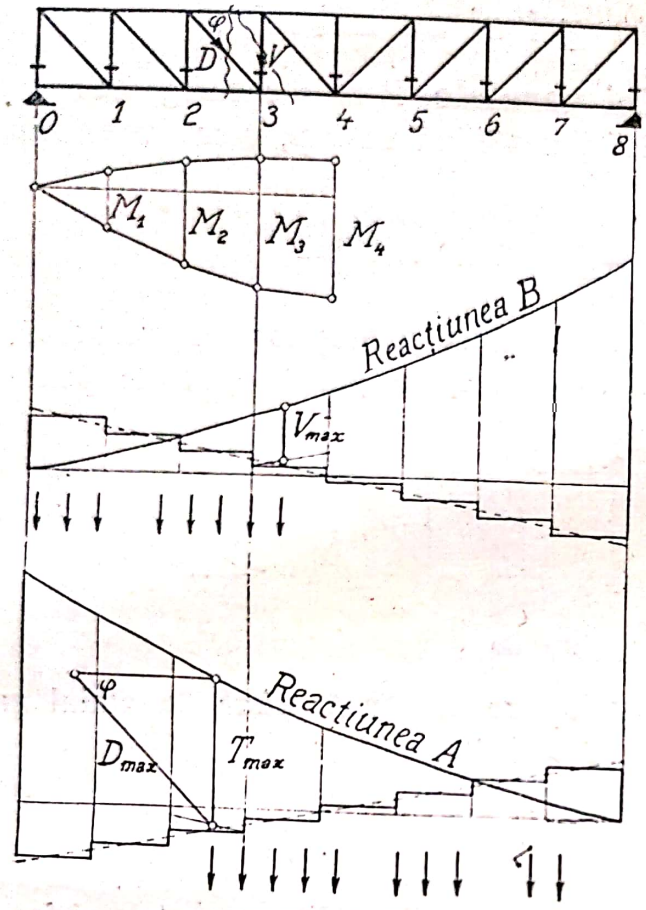


Fig. 201

$V_j = 0$, dacă avem calea jos, pe când dacă aceasta este sus avem $V_j = -P_j$.

Pentru cazul unui convoiu mobil se pune problema de a afla valorile maxime ale eforturilor în bare.

Eforturile în tălpi fiind date de momentul încovoietor maxim în dreptul nodurilor, problema se reduce la acea cunoscută (Nr. 102) de a determina poziția convoiului și momentului încovoietor maxim.

Aflăm deci momentele încovoietoare maxime la noduri, datorită sarcinei proprii și sarcinei mobile (fig. 201). Cu ajutorul lor aflăm eforturile în tălpi.

Pentru diagonale și verticale forța tăietoare ne dă răspunsul. Pe figură se găsește curba reacțiunii din *B*, care ne dă, împreună cu forța tăietoare datorită sarcinii proprii, forța tăietoare maximă în panou, când încărcăm numai porțiunea din stânga secției. Această poziție ne dă efortul maxim de compresiune în verticală, pentru panoul și secția indicată.

De asemenea curba reacțiunii din *A* împreună cu forța tăietoare datorită sarcinii proprii ne dă forța tăietoare maximă în panou, când încărcăm numai porțiunea din dreapta secției. Pe figură această forță tăietoare este maximă când a doua sarcină a convoiului calcă în nod. Din forța tăietoare aflăm prin proecție efortul maxim de întindere în diagonală pentru panoul și secția indicată.

Se vede deci că eforturile maxime în barele tălpilor, compresiune în talpa de sus, tensiune în talpa de jos. se află pentru momentele încovoietoare maxime în noduri, care se obțin pentru

o incărcare pe toată deschiderea grinzii; pe când eforturile maxime în diagonale, tensiune în diagonale şi compresiune în verticale, se află pentru o încărcare parţială, numai pe porţiunea respectivă din grindă.

123. **Grinda cu tălpi paralele, diagonale în K.** Forma aceasta este întrebuinţată foarte des pentru contra vântuiri (fig. 202). Vom face o secţie pentru a izola diagonalele

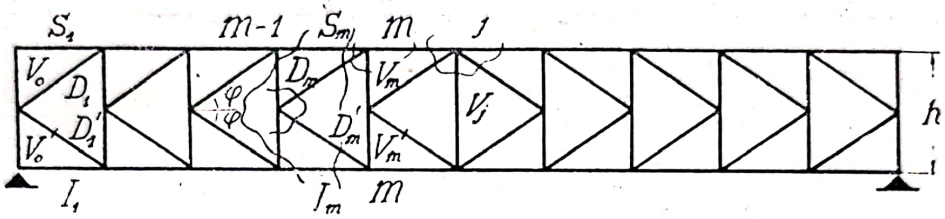


Fig. 202

tăind numai tălpile şi verticalele şi metoda Ritter ne va da

$$S_m = -\frac{M_{m-1}}{h}, \quad I_m = -S_m = +\frac{M_{m-1}}{h}$$

Echilbrul nodului unde se întâlnesc cele două diagonale din panou ne dă condiţia

$$D_m = -D'_m$$

deci diagonala superioară va fi comprimată, cea de jos întinsă. Scriind echilibrul pe verticală în secţia ce taie tălpile şi cele două diagonale vom avea

$$D_m \sin\varphi + D'_m \sin\varphi = T_m$$

$$D_m = -D'_m = \frac{T_m}{2\sin\varphi}$$

Pentru a afla efortul în verticală, luând echilibrul nodului superior m avem

$$V_m - D_m \sin\varphi = 0, \quad V_m = +\frac{T_m}{2}$$

pe când pentru montantul de jos V'_m, în caz când avem calea jos, echilibrul nodului ne va da

$$V'_m + D'_m \sin\varphi - P_m = O, \; V'_m = P_m = \frac{T_m}{2}$$

relaţii care se inversează, atunci când calea este sus.

Face excepţie montantul pe reazem. Vom avea

$$V_0 = 0,\ S_1 = 0,\ I_1 = 0,\ V'_0 = -A$$

Pentru nodul din mijloc j, vom avea echilibrul acestui nod, când cele două diagonale fac echilibru efortului din montant. Obţinem

$$V_j = \frac{1}{2} P_j$$

124. Grinda cu tălpi oarecare, cu diagonale. Făcând

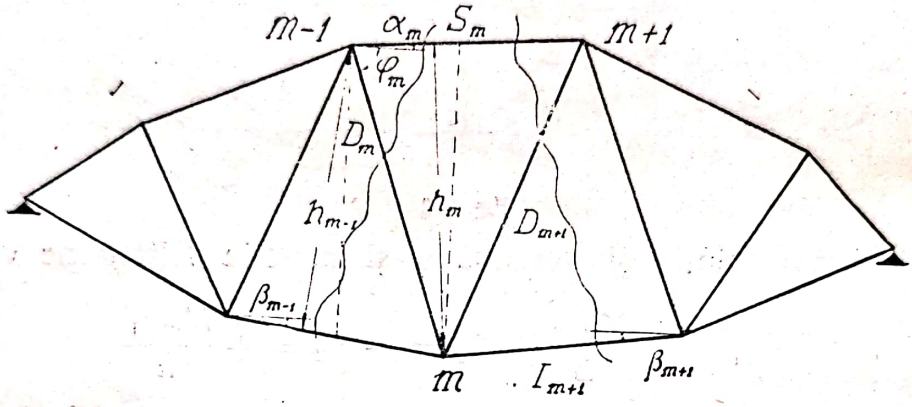


Fig. 203

o secţie, cu notaţiile întrebuinţate în metoda Ritter (fig. 203), vom avea

$$S_m = -\frac{M_m}{h_m},\quad I_{m-1} = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

sau luând, $h_m = h'_m \cos \alpha_m$, $h_{m-1} = h'_{m-1} \cos \beta_{m-1}$ vom putea scrie

$$S_m \cos \alpha_m = -\frac{M_m}{h'_m},\quad I_{m-1} \cos \beta_{m-1} = \frac{M_{m-1}}{h'_{m-1}}$$

Pentru efortul în diagonală vom proecta pe orizontală

$$D_m \cos \varphi_m + S_m \cos \alpha_m + I_{m-1} \cos \beta_{m-1} = 0$$

$$D_m \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h'_m} - \frac{M_{m-1}}{h'_{m-1}}$$

Pentru diagonala urcătoare, luând o secţie în panoul următor, vom putea scrie deasemenea

$$D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} + S_m \cos \alpha_m + I_{m+1} \cos \beta_{m+1} = 0$$

$$D_{m+1} \cos \varphi_{m+1} = \frac{M_m}{h'_m} - \frac{M_{m+1}}{h'_{m+1}}$$

Pentru cazul unui convoiu mobil se pune problema de a afla valorile maxime ale eforturilor în bare.

Eforturile în tălpi fiind date de momentul încovoietor în dreptul nodurilor, problema se reduce la acea cunoscută, de a determina poziţia convoiului şi momentul încovoietor maxim în noduri.

Pentru diagonale va trebui să încărcăm numai o parte a grinzii, adică convoiul să înainteze până la punctul neutru. Prin încercări vom găsi poziţia care ne dă forţa tăietoare maximă, ceea ce se face scăzând din reacţiunea maximă pe reazem componentele pe nodul din stânga. Când această forţă tăietoare maximă este chiar reacţiunea, atunci putem să aflăm eforturile servindune de metoda Culmann.

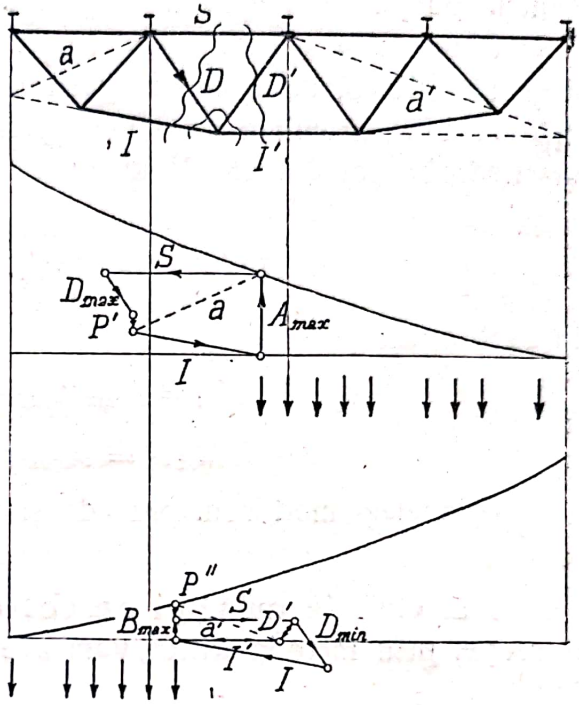


Fig. 204

Avem ast-fel aflată reacţiunea A_{max} în panoul considerat, pentru cazul când a doua sarcină a convoiului calcă în nod (fig. 204). Această forţă face echilibru eforturilor S, D, I în barele întâlnite în secţia ce facem în acest panou, precum şi forţei P', componenta primei sarcini din panou pe nodul din stânga. Intrebuinţând direcţia ajutătoare a, vom descompune reacţiunea după direcţiile I, a, iar componenta a după direcţiile S, D, P'. Parcurgând poligonul forţelor găsim sensul eforturilor. Efortul obţinut în diagonală, corespunzând reacţiunii maxime pentru porţiunea pozitivă a grinzii, este deci D_{max}, tensiune.

Pentru a afla compresiunea în diagonală, trebue să încărcăm porţiunea din stânga. Atunci însă vom lua în acelaş panou o secţie ce taie barele S, D', I' şi vom considera bucata din dreapta, determinând reacţiunea B_{max}, care are loc, după cum se vede în figură, când a doua sarcină calcă în nod. Folosindu-ne de direcţia ajutătoare a', şi ţinând seama şi de componenta P'' a primei sarcini din panou pe nodul din dreapta, aflăm eforturile S, compresiune, D', tensiune, I' tensiune. Sub eforturile D', I', D, I

nodul inferior trebue să fie în echilibru, ceea ce se vede în conturul închis ce-l obţinem şi la care găsim pentru D compresiune. Efortul astfel obţinut, corespunzând reacţiunii maxime pentru porţiunea negativă a grinzii, este D_{min}, compresiune.

Putem afla şi prin calcul valorile maxime şi minime pentru diagonale, dacă, după ce am găsit poziţia convoiului cea mai defavorabilă, calculăm momentele pentru această poziţie şi pentru nodurile considerate. Vom avea

$$_{max}\, D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_m}{h'_m} - \frac{M_{m-1}}{h'_{m-1}}\right)$$

în care avem

$$M_m = A_{max}\, x_m - P'a$$

$$M_{m-1} = A_{max}\, x_{m-1}$$

In acelaşi mod vom proceda şi pentru $_{min}\, D$.

125. **Grinda cu tălpi oarecare, cu montanţi.** Făcând o secţie, prin metoda Ritter, vom avea aceleaşi rezultate pentru

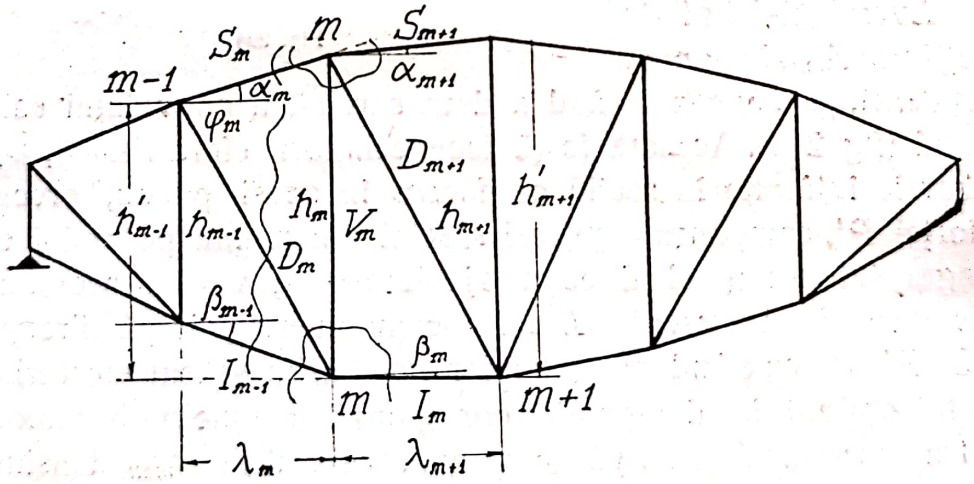


Fig. 205

eforturile în barele tălpilor şi în diagonale (fig. 205).

In ceea ce priveşte montanţii trebue să luăm separat cele două cazuri, când avem calea jos sau sus.

Să considerăm calea jos şi să luăm echilibrul nodului m, la partea superioară, în care lucrează barele S_m, S_{m+1}, V_m, D_{m+1}. Condiţia de echilibru în jurul punctului $m+1$ ne dă

$$V_m \lambda_{m+1} + S_m \cos \alpha_m h'_{m+1} - S_{m+1} \cos \alpha_{m+1} h_{m+1} = 0$$

$$V_m = \frac{M_m}{h_m} \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$$

Să considerăm calea sus şi să luăm echilibrul nodului m, la partea inferioară, în care lucrează barele I_{m-1}, I_m, V_m şi D_m. Condiţia de echilibru în jurul punctului m—1 sus ne dă

$$V_m \lambda_m + I_m \cos \beta_m h'_{m\ 1} - I_{m-1} \cos \beta_{m-1} h_{m-1} = 0$$

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{h_m} \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}$$

Fac excepţie montanţii de la reazem şi cel de la mijloc. Pentru V_o, dacă avem calea jos, scrim

$$V_o = -(A - P_o)$$

pe când dacă avem calea sus vom scrie

$$V_o = - - A$$

Pentru a găsi pe V_1, calea sus, separăm nodul 1 neîncărcat jos, şi luăm momentele faţă de punctul 0 ca şi în cazul precedent.

Pentru montantul de la mijloc V_j luăm proecţiile pe verticală

$$V_j + S_j \sin \alpha_j + S'_j \sin \alpha'_j = 0$$

$$V_j = \frac{M_j}{h_j} (\operatorname{tg} \alpha_j + \operatorname{tg} \alpha'_j)$$

La care se scade P_j, dacă avem sarcinile la calea de sus.

Pentru cazul unui convoiu mobil, se află valorile maxime şi minime în montanţi, servindu-ne de linia forţelor tăietoare, încărcând o parte sau cealaltă a grinzii ca şi la exemplele precedente.

126. Calculul unei grinzi de macara. O grindă de macara o putem întocmi din o *grindă cu zăbrele*, care se calculează ca sistem articulat. Sarcina se compune din căruciorul

macaralei, adică două sarcini mobile P_1 şi P_2, distanţa între ele fiind a.

Să alegem o grindă în care talpa de sus este dreaptă pentru că poartă şinile căruciorului, iar talpa de jos parabolică.

Aplicăm metoda lui Ritter, şi pentru a obţine eforturile maxime în bare, va trebui să ne dăm ast-fel sarcina, ca să avem momentul maxim, adică sarcina cea mai mare să calce în nod.

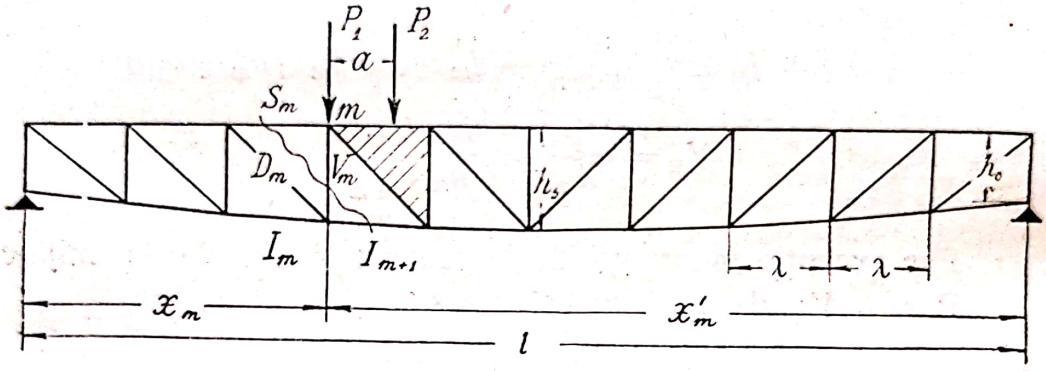


Fig. 206

Pentru nodul m, în poziţia din figură, momentul se deduce din reacţiunea A şi avem

$$A_m = \frac{P_1 x'_m}{l} + P_2 \frac{x'_m - a}{l} = (P_1 + P_2)\frac{x'_m}{l} - P_2 \frac{a}{l}$$

şi atunci vom putea scrie

$$S_m = -\frac{M_m}{h_m} = -\frac{A_m x_m}{h_m}$$

$$l_{m+1} = \frac{M_m}{h_m \cos \alpha_{m+1}} = \frac{A_m x_m}{h_m \cos \alpha_{m+1}} = A_m \frac{x_m}{h_m} \frac{i_{m+1}}{\lambda}$$

în care am notat cu i_{m+1} lungimea barei I_{m+1}, şi care ne dau maximele când sarcina P_1 calcă în nodul m.

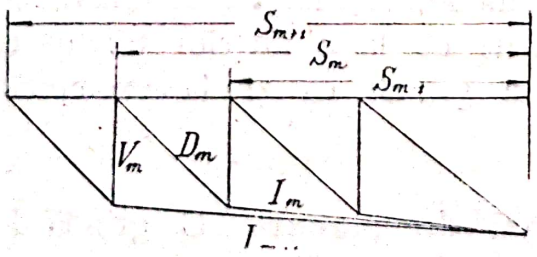


Fig. 207

In ceea ce priveşte diagonalele semnul lor depinde de forţa tăietoare care ne dă maximul după cum încărcăm o parte sau alta a grinzii, iar o sarcină calcă în secţie, obţinând astfel valori pozitive sau negative.

In poziţia de pe figură, încărcând numai partea din dreapta, obţinem tensiune în diagonala D_m şi compresiune în montantul V_m, având

$$+ D_m = \frac{1}{\cos \beta_m}(S_m - I_m \cos \alpha_m)$$

$$= \frac{1}{\cos \beta_m}\left(\frac{A_m x_m}{h_m} - \frac{A_m x_{m-1}}{h_{m-1}}\right) = A_m \left(\frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}}\right)\frac{d_m}{\lambda}$$

$$- V_m = (S_{m+1} - {}^{c}_{m})\frac{h_{m+1}}{\lambda} = A_m \left(\frac{x_{m+1}}{h_{m+1}} - \frac{x_m}{h_m}\right)\frac{h_{m+1}}{\lambda}$$

în care am notat cu d_m lungimea diagonalei, şi h_m a montantului.

Dacă încărcăm grinda în partea din stânga aşa ca tot P_1 să vie în nod, vom obţine imagina grinzii încărcată însă în nodul simetric faţă de mijloc.

Exemplu. Să luăm o grindă de $l = 15$ m deschidere cu 10 panouri $\lambda = 1{,}5$. Înălţimea la margine $h_0 = 1{,}00$ m, înălţimea la mijloc $h_5 = \frac{l}{10} = 1{,}5$ m

Sarcina pe care o ridicăm $P_1 = 4{,}5$, $P_2 = 3{,}5$ t şi distanţa între ele $a = 1{,}0$ m

Punem $x_m = m\lambda$, $x'_m = m'\lambda$ şi vom avea pentru reacţiune

$$A_m = 8\frac{m'\lambda}{10\lambda} - 3{,}5\frac{1}{15} = 0{,}8\,m' - 0{,}23 \text{ t}$$

Înălţimile h_m le vom deduce din ecuaţia parabolei care ne dă

$$h_m = h_0 + \frac{4 f x_m x'_m}{l^2} = 1 + \frac{4 \,.\, 0{,}5 \,.\, mm'}{100}$$

şi atunci vom putea scrie

$$\frac{x_m}{h_m} = \frac{m\lambda}{1 + \frac{4 \,.\, 0{,}5\ mm'}{100}} = 1{,}50\,\frac{m}{1 + 0{,}2\ mm'}$$

$$\left(\frac{i_m}{\lambda}\right)^2 = 1 + \left(\frac{h_m - h_{m-1}}{\lambda}\right)^2$$

$$\left(\frac{d_m}{\lambda}\right)^2 = 1 + \left(\frac{h_m}{\lambda}\right)^2$$

$$\frac{h_m}{\lambda} = \frac{1}{1{,}5} + \frac{4\ mm'}{3\ 100}$$

Datele calculate pentru jumătatea din stânga a grinzii sunt trecute în tabloul ce urmează.

m	m'	A_m t	h_m m	$\frac{x_m}{h_m}$	$\frac{h_m}{\lambda}$	$\frac{d_m}{\lambda}$	$\frac{l_m}{\lambda}$	$-S_m$ t	l_m t	$\frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}}$	D_m t	V_m t
0	10	7,77	1,00	0	0,666	—	—	—	—	—	—	7,770
1	9	6,97	1,18	1,271	0,786	1,271	1,007	8,858	0	1,271	11,259	6,132
2	8	6,17	1,32	2,272	0,879	1,331	1,004	14,018	8,893	1,001	8,220	5,235
3	7	5,37	1,42	3,169	0,946	1,376	1,002	17,017	14,046	0,897	6,628	4,686
4	6	4,57	1,48	4,054	0,986	1,401	1,001	18,526	17,187	0,885	5,678	4,323
5	5	3,77	1,50	5,000	1,000	1,414	1,000	18,850	18,526	0,946	5,042	—

Pentru montanţi regula nu se aplică la doi pentru care vom scrie separat

$$V_0 = A_0 = 7{,}77 \text{ t}$$

pe când pe V_5 îl vom deduce din echilibrul nodului 5 şi anume

$$V_5 = P_1 = 4{,}5 \text{ t}$$

§ 4. Deformaţia grinzilor cu zăbrele.

127. Deformaţiile elementare. Deformaţia grinzii cu zăbrele se compune din deplasările nodurilor din cauza lungirii barelor sau a scurtării lor şi din rotaţii ale barelor, produse de deplasarea barelor şi a nodurilor vecine.

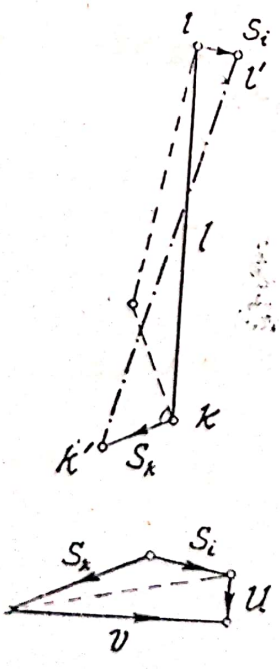


Fig. 208

Pentru a vedea fenomenul să studiem deplasarea unei bare oare care ce uneşte nodurile i, k. Nodul i se deplasează într'o direcţie oare care cu cantitatea s_i, mutându-se din i în i', nodul k de asemenea cu cantitatea s_k. Rezultă că bara ik se mută în $i'k'$ suferind o deformaţie şi o rotaţie. (fig. 208).

Centrul instantaneu de rotaţie este în O, iar deplasările barei ik le putem vedea geometric fiind reduse la două componente: u deplasarea în direcţia barei, adică deformaţia ei $u = \Delta l$, v normal pe bară adică rotaţia ei $v = l\theta$. De asemenea în mişcarea instantanee ce se produce, putem considera deplasările punctelor drept rotaţii $s_i = r_i \theta_i$, $s_k = r_k \theta_k$.

Să luăm un triunghiu 1, 2, 3 în care

cunoaştem deplasările s_1, s_2 ale punctelor 1, 2, deformaţiile barelor l_{13}, l_{23} şi vrem să aflăm deplasarea punctului 3.

Deplasarea punctului 3 să fie s_3. (fig. 209). Atunci din compunerea deplasărilor s_2 şi s_3 vom avea componentele deplasării barei l_{23}, din care una este lungirea barei cunoscută l_{23}. cealaltă are direcţia cunoscută, normală pe direcţia barei l_{23}. In acelaş mod compunerea deplasărilor s_1 şi s_3 ne dă componentele deplasărilor barei l_{13}.

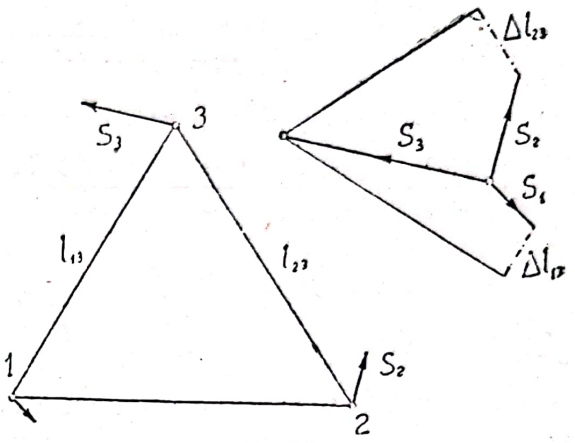


Fig. 209

Rezultă deci construcţia următoare. Ducem dintr'un pol O deplasările cunoscute s_1 şi s_2. Prin extremităţile acestora ducem deformaţiile barelor paralele cu direcţia barelor şi după sensul lor lungiri sau scurtări. Ducând perpendiculare pe direcţiile acestora obţinem deplasarea căutată s_3.

In figură se vede că Δl_{13} este scurtare, datorită unei compresiuni în bară. pe când Δl_{23} este lungire, datorită deci unei tensiuni.

Intr'un triunghiu în care deplasările nodurilor sunt cunoscute, trebue deci să avem anumite deformaţii ale laturilor, şi invers deformaţiile barelor ne dau deplasările nodurilor.

Vom putea deci în acest fel, cercetând fie care triunghîu care compune grinda cu zăbrele, să aflăm succesiv deplasările tuturor nodurilor. In modul acesta se poate desena o figură, care conţine deplasările nodurilor şi în care putem pune şi condiţii pentru reazeme, care sunt fixe sau au o anumită deplasare. Din cauză că deformaţiile barelor sunt foarte mici trebue aleasă o scară convenabilă, ca să le putem reprezenta pe desen şi figura se desenează greu.

Exemplu. Să aflăm în acest mod deplasarea nodurilor grinzii armate din exemplul de la Nr. 114 pag. 229.

Cele două bare de lemn ale tălpii superioare vor fi scurtate din cauza compresiunii

$$\Delta l = \frac{S\,l}{E\,\Omega} = \frac{7853 \times 400}{100000 \times 28^2} = 0,\ 0456 \text{ cm.}$$

Cei doi tiranți din fier se vor lungi din cauza tensiunii. Lungimea tirantului este $l_1 = l : \cos \alpha = 403{,}2$ cm.

$$\Delta l = \frac{I l}{\Omega E} = \frac{8064 \times 403{,}2}{2 \times 10^6 \times 7{,}06} = 0{,}23 \text{ cm}$$

Popul, foarte scurt, va avea o scurtare foarte mică,

$$\Delta l = \frac{V h}{E \Omega} = \frac{2000 \times 50}{100000 \times 25^2} = 0{,}0016 \text{ cm.}$$

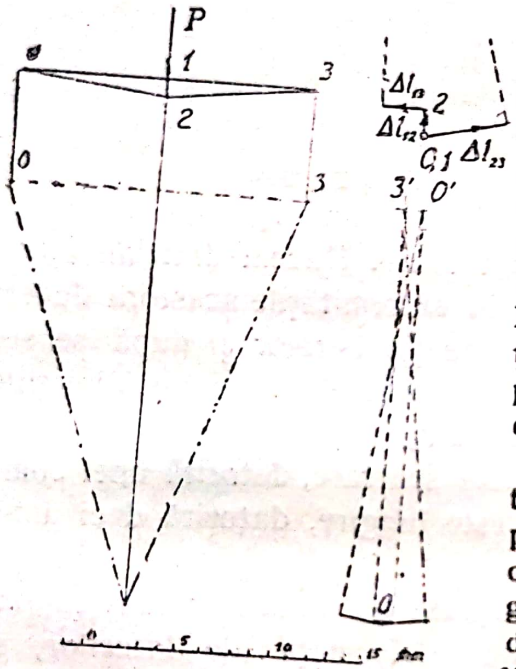


Fig 210

Luând deci un pol O, vom porni dela bara 1 2 care rămâne verticală și vom alege punctul 1 în pol. (fig. 210). Punctul 2 se deplasează deci cu Δl_{12}, pe care o purtăm în sus, fiind scurtare și apropiind pe 2 de 1. Din punctul 1 ducem Δl_{23}, lungire, paralel cu bara 23, din punctul 2 ducem Δl_{13}, scurtare paralel cu bara 13. Ducând perpendiculare pe extremitățile acestora se obține noua poziție a punctului 3'. Construcția este dată în detaliul figurii.

Desenând același lucru pentru triunghiul 0 1 2 găsim noua poziție a punctului 0, care este pe aceiași orizontală cu 3'. Prin aceasta am găsit pozițiile noi ale nodurilor și deci săgeata punctului 1, dată în figură. Citită la scară săgeata este $y = 22{,}2$ mm.

128. Aflarea săgeții cu ajutorul forțelor elastice. Se pot afla săgețile cu ajutorul poligonului funicular al unor forțe, numite *forțe elastice*, prin asemănare cu aceiași problemă de la grinda dreaptă. Metoda aceasta se bazează pe următoarele observații.

Să considerăm într'o grindă cu zăbrele numai o singură bară, de exemplu la talpa de sus, care se deformează, restul fiind considerate rigide și reprezentate în figură haşurat (fig. 211). In urma efortului S_m ce se naște în bară sub sarcinile ce lucrează, bara se deformează cu cantitatea Δl_m, care este în acest caz o scurtare, iar rezultatul va fi lăsarea punctului m cu o săgeată y_m.

Putem considera linia deformată ca un poligon funicular,

cu distanţa polară $H=1$, dat de o forţă w_m ce lucrează în m, şi care este forţa elastică.
Putem deci scrie

$$y_m = w_m \frac{x_m\, x'_m}{l}$$

Să ne închipuim că în m lucrează o forţă $P' = 1$ tonă. Vom avea deci un moment încovoietor $M'_m = x_m\, x'_m : l$ care va produce în bara tălpii de sus un efort $S'_m = M'_m : h_m$ şi deci vom avea un lucru mecanic faţă cu deplasările de mai sus, care este

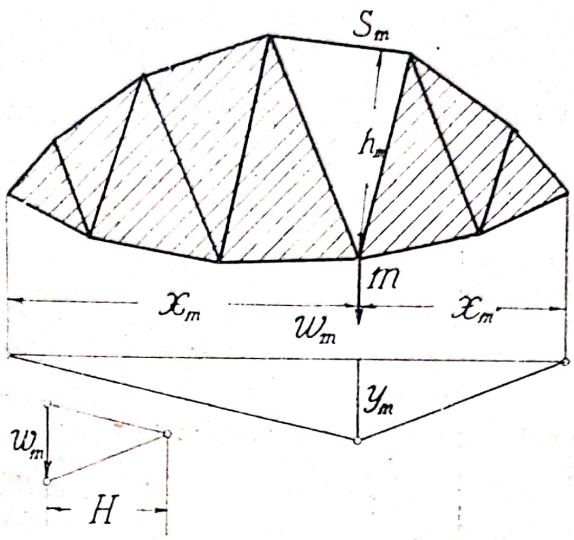


Fig. 211

$$P'\, y_m = S'_m\, \Delta\, l_m$$

de unde

$$y_m = S'_m\, \Delta\, l_m = \frac{M'_m}{h_m}\, \Delta\, l_m = \frac{\Delta\, l_m}{h_m} \frac{x_m\, x'_m}{l}$$

şi punând în legătură cu prima relaţie

$$w_m = \frac{\Delta\, l_m}{h_m}$$

deci săgeata produsă de deformaţia tălpii de sus este aceiaşi cu săgeata produsă de o forţă elastică w_m ce lucrează în nodul m.

Putem deci să aflăm uşor săgeata produsă de deformaţia barelor tălpilor, dacă aşezăm în fiecare nod o forţă elastică corespunzătoare deformaţiei barei respective, şi desenăm poligonul funicular al acestor forţe.

La calculul săgeţilor neglijem deformaţia produsă de diagonale. Prin analogie cu grinda dreaptă, unde am neglijat săgeata datorită forţelor tăietoare (nr. 86), ne amintim că efortul în diagonale este produs de forţa tăietoare şi deci săgeata va fi şi aci mică.

Se poate arăta în acelaşi mod că, în cazul când o singură diagonală este elastică, săgeata este dată de

$$w_i = \frac{\Delta l}{h_i}$$

sau echivalentă cu două sarcini, de semne contrare,

$$w_1 = \frac{\Delta l}{h_1}, \quad w_2 = \frac{\Delta l}{h_2}$$

Prin aceasta se vede că săgeata este mai mică (fig. 212).

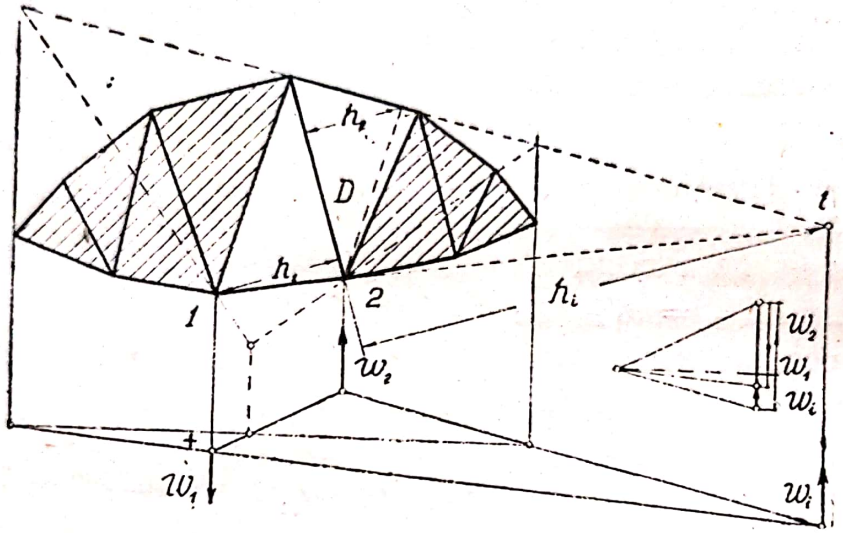


Fig. 212

pe deoparte pentru că h_i este mai mare, pe de alta fiindcă deformaţia este pozitivă într'un nod şi negativă în nodul vecin, nodul 2 urcă şi nodul 1 coboară.

In fine se atrage atenţia asupra asemănării între curbele funiculare care ne dau săgeata şi liniile de influenţă pentru eforturile din barele respective.

129. **Aflarea săgeţii cu ajutorul lucrului mecanic.** Prin deformarea barelor se produce un lucru mecanic de deformaţie, care se arată în afară prin săgeţile diferitelor puncte ale grinzii. Putem să punem în evidenţă lucrul mecanic şi să ne servim de el la calculul săgeţii.

Grinda noastră cu zăbrele este încărcată cu sarcini date, care produc în bare eforturi axiale N, care dau ca deformaţii în bare lungiri şi scurtări Δl.

Să ne închipuim că în nodul m unde vrem să aflăm săgeata y_m, facem să lucreze o forţă $P' = 1$ tonă, în direcţia săgeţii căutată.

Lucrul mecanic produs deci de forţa P' va fi $P' y_m$ şi care se regăseşte sub forma lucrului mecanic interior înmagazinat în fiecare bară. Ori forţa P' ce am aşezat în nodul m va produce în fie care bară eforturi N', care cu deformaţiile

barelor ne vor da lucrul mecanic de deformaţie. Vom avea deci

$$y_m = \Sigma \frac{N\ N'\ l}{E\ \Omega}$$

suma întinzându-se la toate barele sistemului.

Calculul se face sub formă de tablou şi se reduce la facerea produselor şi adunarea ultimei coloane, care ne dă astfel săgeata.

Exemplu Să aflăm săgeata punctului de sus, de la coamă, la ferma din fig. 187. Sub sarcina avută în vedere citim în reciprocă, la scara desenului, eforturile în diferitele bare, care sunt trecute în tabloul de mai jos în coloana N în tone. Lungimile barelor le luăm deasemenea din datele problemei şi din desen, ele sunt trecute în coloana a doua în cm.

Aşezând în punctul de sus, a cărui săgeată voim să o aflăm, o forţă $P'=1$, aflăm cu o reciprocă eforturile produse în bare N', care sunt trecute în tablou în coloana următoare.

Secţia barelor este dată după dimensionare în coloana indicată, şi în coloana 5 se dă valoarea secţiei în cm².

In fine în ultima coloană s'au calculat produsele, luând $E = 2{,}1 \times 10^6$ Introducând cifrele din coloane se obţine produsul în cm $\times 10^3$, şi sumând avem săgeata punctului de sus 1,10 cm.

Să vede că barele diagonale contribuesc cu puţin la săgeată, termenii corespunzători reprezintă 9% din total.

Bara	N t	l cm	N'	Secţia	Ω cm²	$\frac{N\ N'\ l}{E\ \Omega}$ cm $\times 10^3$
S_1	— 12,3	541	— 1,38	2 ⌊ 120.80.10	38,2	114,46
S_2	— 10,5	541	— 1,38	„	38,2	97,71
S_3	— 10,2	541	— 1,38	„	38,2	94,92
S_4	— 11,2	541	— 1,38	„	38,2	104,23
I_1	9,3	577	1,18	2 ⌊ 60.60.6	13,82	218,17
I_2	4,6	666	0,96	2 ⌊ 40.40.6	8,96	156,35
I_3	9,3	577	1,18	2 ⌊ 60.60.6	13,82	218,17
D_1	— 2,7	200	0	2 ⌊ 30.45.5	7,06	—
D_2	5,3	577	0,33	2 ⌊ 50.50 5	9,6	50,35
D_3	5,2	577	0,33	„	9,6	49,54
D_4	— 2 5	200	0	2 ⌊ 30.45 5	7,06	—
					Total	1103,76

Cap. XIII. Impingerea pământului

130. **Unghiul taluzului natural. plan de lunecare.** Unele construcţii. destinate să susţie un masiv de pământ sau alt material, sunt supuse la împingerea produsă de acesta. Astfel sunt zidurile de sprijin, pereţii magaziilor sau silozurilor, barajele.

Impingerea pământului este datorită mişcării produsă de diferitele părticele, mişcare influenţată de frecare şi de coeziune. Problema se simplifică întroducând noţiunea de *unghiu al taluzului natural.*

Dacă aşezăm materialul grăunţos: nisip, pietriş, grâu, etc., într'o grămadă, vom observa că materialul curge, luând o poziţie de echilibru naturală, variind după felul materialului. O părticică de material aşezată pe planul înclinat care se formează astfel, va sta în echilibru, dacă frecarea ce intră în joc o poate menţine

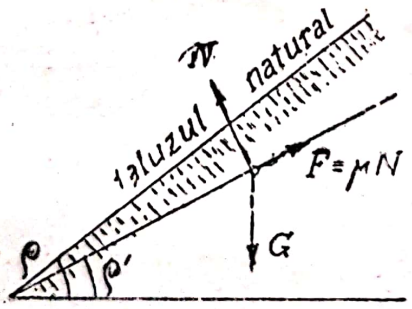


Fig. 213

$$F = f\,N,\ f = \frac{F}{N} = tg\,\rho$$

Echilibrul este asigurat cât timp unghiul $\rho' < \rho$ o valoare limită peste care, frecarea fiind învinsă, grăuntele se va rostogoli pe suprafaţa înclinată (fig. 213).

Materialul care se găseşte sub unghiul ρ este deci în echilibru, materialul ce se găseşte deasupra nu poate sta în echilibru, cade, şi se formează acest plan înclinat *taluzul natural.* Unghiul ρ, variabil cu materialul, este *unghiul taluzului natural.*

Dacă deci avem de sprijinit un masiv de pământ, materialul aşezat sub unghiul taluzului natural are echilibrul său asi-

gurat, şi deci nu va exercita nici o împingere, Materialul ce se găseşte deasupra taluzului natural, prizma $A\,B\,C$, va trebui să fie sprijinit şi împiedecat să alunece, va exercita deci o împingere asupra zidului dar şi asupra taluzului. *Coulumb*, care a studiat această problemă, a găsit că prin întroducerea zidului de sprijin care modifică condiţiile de echilibru ale masivului de pământ, lunecarea are loc după un plan $B\,D$ numit *planul de lunecare*, părticelele ce se află sub acest plan fiind menţinute în echilibru pe taluzul natural prin forţa de împingere. Prizma $A\,B\,D$ va fi astfel în echilibru sub acţiunea greutăţii ei G, a reacţiunii suprafeţii de lunecare R şi a împingerii zidului E. Coulumb admite ca împingere a masivului acea poziţie de lunecare pentru care avem E_{max}. Trebue menţionat că ipoteza că $B\,D$ este plan de lunecare uşurează mult calculul, dar această ipoteză nu este reală, forma suprafeţii de lunecare fiind alta de cât planul.

131. Calculul împingerii E. Să luăm zidul cu prizma de pământ ABD, care este în echilibru sub acţiunea forţelor E, G, R. Direcţia forţei E este presupusă cunoscută şi dată prin unghiul β pe care îl face cu verticala. Acest unghiu este în legătură cu înclinarea feţei $A\,B$ a zidului de sprijin şi cu frecarea ce se produce între zid şi pământ. Reacţiunea R face cu normala la planul de lunecare $B\,D$ unghiul taluzului natural ρ, iar suprafaţa de lunecare $B\,D$ face cu taluzul natural unghiul α. Deci unghiul pe care-l face R cu verticala este α. In acest caz, din triunghiul forţelor vom scrie

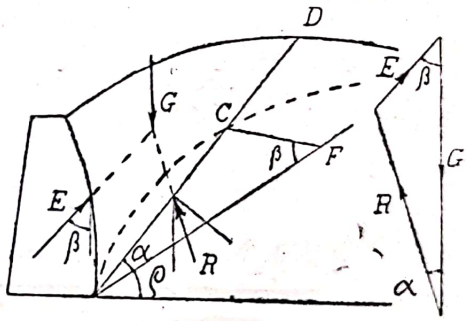


Fig. 214

$$E = G\frac{\sin\,\alpha}{\sin\,(\alpha+\beta)}$$

Când α variază, când poziţia suprafeţei de lunecare $B\,D$ se schimbă, E variază şi vom lua valoarea maximă. Dacă pe linia taluzului natural luăm punctul F, aşa ca $B\,F = G$, şi ducem unghiul β, obţinem punctul C, reproducând triunghiul forţelor. Locul punctului C pentru diferitele valori ale unghiului α

este o curbă, ce poartă numele lui *Culmann* care a tratat cel dintâi această chestiune.

După teoria lui Coulomb, să aflăm poziţia care ne dă valoarea maximă a impingerii E. Când α variază vom avea derivând,

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\frac{G\sin\alpha}{(\sin\alpha+\beta)} = 0$$

$$\frac{dG}{d\alpha}\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} + G\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 0$$

de unde

$$G = -\frac{dG}{d\alpha}\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

cu notaţiile din figură (fig. 215) vom avea $DF = y$, $DH = z$ $BF = x$

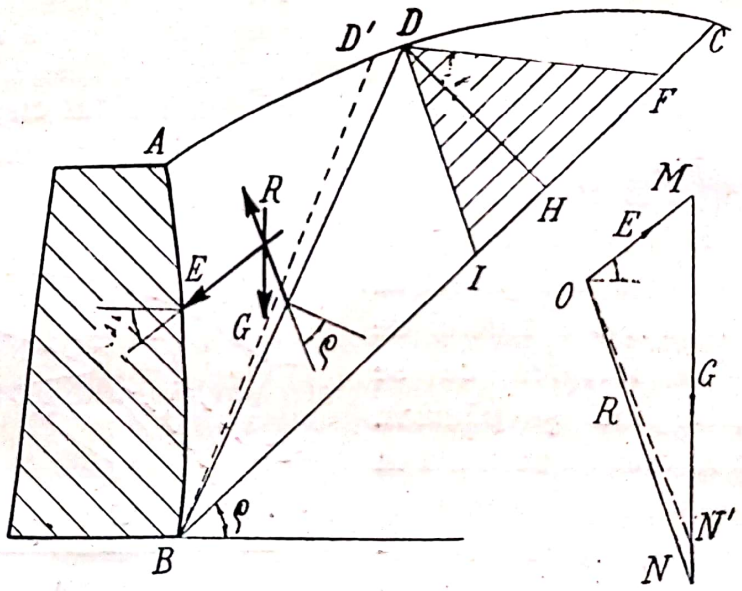


Fig. 215

$$dG = -\frac{1}{2}\gamma l^2 d\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{z}{l}, \quad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{x}{l}$$

deci, fntroducând mai sus

$$G = \frac{1}{2}\gamma l^2 \frac{x}{l}\frac{z}{l} = \frac{1}{2}\gamma xz$$

şi deci

$$E_{max} = \frac{G\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2}\gamma xz\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\gamma zy$$

Relaţiile acestea se traduc grafic, căci G este greutatea prismei $A\,B\,D$, deci relaţia ne dă grafic

$$\text{supr. } A\,B\,D = \text{tr. } B\,D\,F$$

care este condiţia cu care determinăm suprafaţa de lunecare $B\,D$. In acest caz împingerea este tocmai

$$E = \gamma \text{ tr. } D\,F\,I$$

Acest rezultat se poate găsi şi geometric, căci comparând triunghiul $B\,D\,F$ cu triunghiul forţelor $O\,M\,N$ avem

$$\text{supr. } A\,B\,D = \text{tr. } O\,M\,N = \text{tr. } B\,D\,F$$

luăm în figură $F\,I = D\,F$ şi avem

$$\frac{\text{tr. } D\,F\,I}{\text{tr. } D\,B\,F} = \frac{F\,I}{B\,F} = \frac{E}{G}$$

şi cum

$$G = \gamma \text{ supr. } A\,B\,D = \gamma \text{ tr. } B\,D\,F = \tfrac{1}{2}\gamma\, x\,z$$

rezultă

$$E = \gamma \text{ supr. } D\,F\,I = \tfrac{1}{2}\gamma\, z\,y$$

Proprietăţile acestea şi traducerea lor grafică au fost găsite de *Rebhann* şi îi poartă numele.

Se extinde acest rezultat pentru cazul unei supraîncărcări p, care lucrează pe suprafaţa pământului. In acest caz greutatea G se compune din greutatea pământului G_1 şi greutatea sarcinei G_2. Pentru un element $D\,D' = ds$ avem

$$d\,G = \tfrac{1}{2}\,\gamma\, h\, ds + p\, ds = \tfrac{1}{2}\gamma' h\, ds$$

asimilând deci greutatea totală cu un masiv de pământ, adică vorbind de o densitate

$$\gamma' = \gamma + \frac{2\,p}{h}$$

132. **Cazuri particulare.** In unele cazuri particulare se pot obţine construcţii simple sau formule simple pentru calcul.

a) *Teren plan.* In acest caz suprafeţele se reduc la triunghiuri (fig. 216). După cele de mai sus

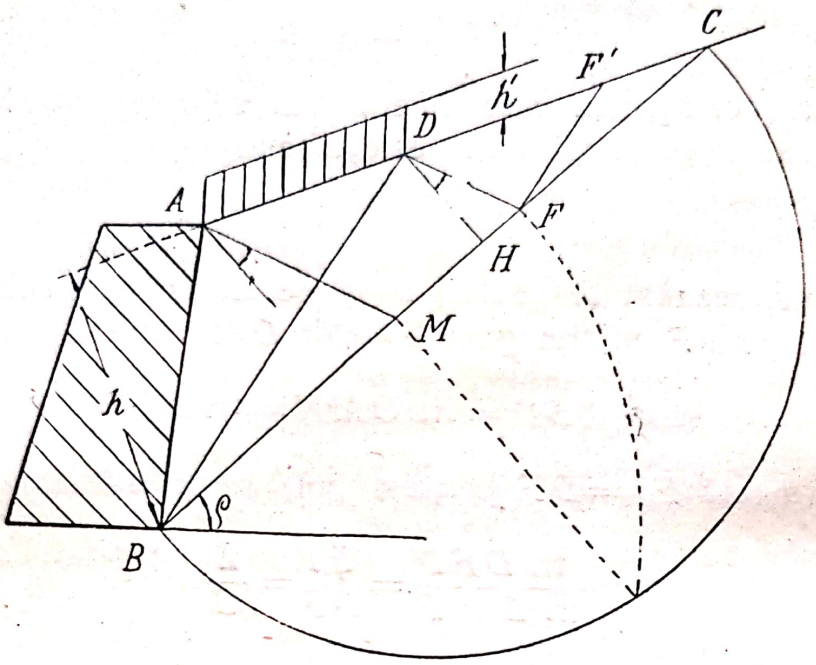


Fig. 216

$$ABD = BDF$$

ducem $FF' \parallel BD$. Vom avea

$$ABD = BDF = BDF'$$

deci $AD = DF'$ şi atunci

$$\frac{BF}{BC} = \frac{DF'}{DC} = \frac{DA}{DC} = \frac{FM}{FC} = \frac{BF - BM}{BC - BF}$$

care ne duce la

$$BF^2 = BM \times BC$$

deci la construcţia geometrică cunoscută şi indicată în figură, care ne dă punctul M din care obţinem punctul F şi deci planul de lunecare BD.

Dacă avem o supraîncărcare p uniform distribuită o transformăm într'o înălţime de pământ $h' = p/\gamma$ vom avea deci

$$G = \gamma(\text{supr. } ABD + AD \times h') = AD\frac{h}{2}\left(\gamma + \frac{2h'}{h}\right)$$

în care

$$\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h}$$

b) *Zid vertical, teren orizontal.* Să admitem suprafaţa zidului de sprijin netedă, deci frecare nulă, împingerea este deci normală la faţa zidului, adică orizontală. Construcţia se simplifică şi ne dă (fig. 217)

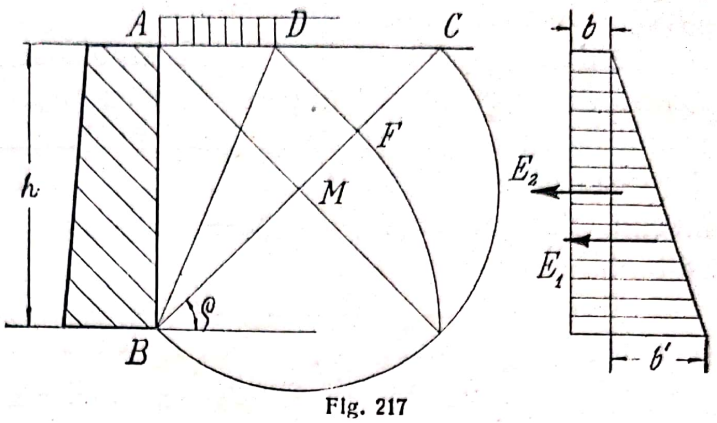


Fig. 217

$$DF = h \operatorname{tg}\left(45 - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$E = \frac{1}{2}\gamma' h^2 \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{\rho}{2}\right)$$

care împingere se compune din două părţi

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{\rho}{2}\right) + p h \operatorname{tg}^2\left(45 - \frac{\rho}{2}\right)$$

Variaţia împingerii are loc după un trapez ale cărui baze sunt date de formula de mai sus.

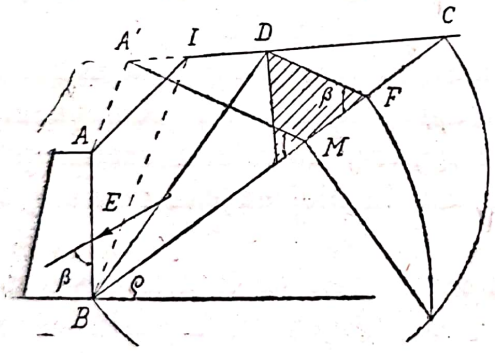


Fig. 218

c) *Teren cu linia frântă.* In cazul când linia terenului este frântă AIC, atunci vom înlocui prizma AIB prin alta echivalentă, mutând punctul A în A'. Vom întrebuinţa deci construcţia precedentă pornind însă din punctul A', găsind astfel linia de lunecare AD. (fig. 218).

133. **Calculul zidurilor de sprijin.** Masivul de pământ este susţinut de un zid de sprijin, care trebue să suporte împingerea pământului, care lucrează pe faţa zidului. Zidul face echilibru acestei împingeri prin greutatea lui şi trebue să reziste la sarcinile care intră în joc.

După cum am văzut împingerea pământului creşte cu patratul înălţimii zidului. Direcţia împingerii este hotărîtă de unghiul de frecare între pământ şi zid şi de înclinarea feţei

zidului. Vom putea deci să alegem aceste elemente, pentru a avea situaţia cea mai favorabilă.

Zidul de sprijin trebue să fie stabil, adică să nu se răstoarne sub acţiunea împingerii. Momentul de stabilitate M_s este momentul greutăţii proprii în jurul muchii exterioare, momentul de răsturnare M_r este momentul împingerii în jurul aceleiaşi muchii. Se cere ca $M_s = 1{,}5 - 2\ M_r$ pentru a avea asigurată stabilitatea.

Momentul de stabilitate se poate mări, dând zidului o înclinare spre masivul de pământ, în loc de a face feţele zidului verticale. La zidurile de sprijin de înălţime mare se dau totdeauna înclinări diferite feţelor.

Zidul rezistă în diferitele secţii la compresiune excentrică şi se calculează în consecinţă. Dacă rezultanta forţelor cade în interiorul sâmburelui central, atunci avem rezistenţe la compresiune pe toată secţia; dacă rezultanta cade în afara sâmburelui central, atunci apar în secţie rezistenţe la tensiune. Acestea se neglijează şi calculăm în cazul când secţia nu rezistă la tensiune.

Când apar tensiuni, care ar avea ca urmare crăpături în zidărie, înseamnă că materialul din acea parte nu lucrează şi se poate îndepărta. Se obţine atunci o formă variabilă a secţiei zidului urmărind după posibilitate linia de presiune.

Zidul trebue să dea o presiune pe teren, care să nu întreacă rezistenţa admisibilă a terenului. Vom căuta deci componenta normală a rezultantei pe faţa terenului, calculând rezistenţele pe teren, în care caz nu putem lua în nici un caz tensiuni, ci numai compresiuni.

Componenta tangenţială a rezultantei pe faţa terenului ne va da o lunecare a zidului pe teren. In general această componentă este mică la împingerile mici, unde se ia fundaţia într'un plan orizontal. Dacă împingerea devine mai mare se micşorează componenta lunecării, luând fundaţia într'un plan înclinat. Cu aceasta se îmbunătăţeşte şi distribuţia presiunilor pe fundaţie.

La zidurile de sprijin de înălţime mică se poate calcula analitic împingerea cu formulele simple, pentru cazurile simple. In cazurile când avem forme de teren mai complicate, ziduri cu mai multe feţe, ipoteze diferite de încărcare, calculul se face de preferinţă grafic.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Să calculăm un zid de sprijin de 3,00 m înălțime, care sprijină rambleul unei șosele. Considerăm ca încărcătură de camioane sau compresor de aburi, o supra sarcină de $p = 1000$ kg/m².

Vom alege pentru terenul nostru $\gamma = 1600$ kg/m³ iar unghiul taluzului natural $\rho = 45^0$, așa că vom avea după formulele de mai sus.

$$E_1 = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{2}1600 \times 3^2 \times 0{,}172 = 1238 \text{ kg}$$

$$E_1 = p\,h \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = 1000 \times 3 \times 0{,}172 = 516 \text{ kg}$$

aceste valori se înțeleg pe metru liniar de zid.

Zidăria o facem din piatră, de greutate 2400 kg/m³, și calculul îl facem păstrând la terenul de fundație o rezistență convenabilă. Vom calcula deci terenul la încovoiere și compresiune, fără să ținem cont de întindere care în acest caz nici nu există. Alegem o fundație de 1,00 m lățime și dăm zidului un fruct de 5 : 1, luând la partea de sus o grosime de 0,80 m. Greutatea zidului este

$$G = \frac{1{,}0 + 0{,}8}{2} \times 3 \times 1 \times 2400 = 6480 \text{ kg}$$

și este aplicată la o distanță de centrul secției de bază

$$e = \frac{B - b}{2}\frac{1}{3}\frac{B + 2b}{B + b} = \frac{1 - 0{,}8}{2}\frac{1}{3}\frac{1 + 1{,}6}{1 + 0{,}8} = 0{,}048 \text{ m}$$

greutatea proprie G, se combină cu împingerile E_1 și F_2, așa că rezultanta lor înțeapă baza în punctul dat de

$$(x + e)\,G = E_1\frac{h}{3} + E_2\frac{h}{2}$$

care este dat de

$$(x + 0{,}048)\,6480 = 1238 \times 1 + 516 \times 1.5$$

$$x = 26{,}2 \text{ cm}$$

distanța la marginea secției va fi atunci $c = 50 - 26{,}2 = 23{,}8$ iar rezistența pe teren

$$\sigma_{max} = \frac{2\,G}{3\,bc} = \frac{2 \times 6480}{3 \times 100 \times 23{,}8} = 1{,}8 \text{ kg/cm}^2$$

Dacă verificăm stabilitatea zidului avem

$$M_s = G\,a = 6480\,(0{,}50 + 0{,}048) + 3551 \text{ kgm}$$

$$M_r = E_1\frac{h}{3} + E_2\frac{h}{2} = 1238 \times 1 + 516 \times 1{,}5 = 2012 \text{ kgm}$$

$$\frac{M_s}{M_r} = \frac{3551}{2012} = 1{,}76$$

Dacă verificăm lunecarea pe fundație, luând unghiul de frecare maxim $\rho = 45^0$ avem

$$\frac{G \operatorname{tg}\rho}{E} = \frac{6480}{1754} = 3{,}69$$

134. Impingerea pământului într'un masiv nelimitat. Într'un masiv nelimitat nu mai este vorba de alunecare, şi se pune problema care sunt presiunile într'un punct oarecare la o adâncime h sub suprafaţa terenului.

Dacă luăm un cub mic în masivul de pământ vom avea pe cele două feţe ale acestuia p_x, p_y, pe care dacă le cunoaştem putem afla presiunea în orice suprafaţă înclinată.

Luând un element prizmatic, şi determinând rezistenţele în faţa înclinată sub unghiul α vom avea

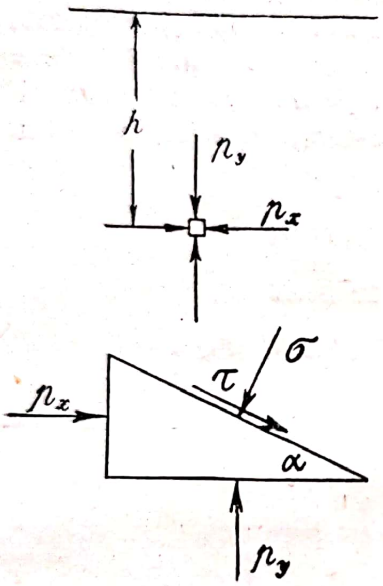


Fig. 219

$$\sigma = p_x \cos^2 \alpha + p_y \sin^2 \alpha$$
$$\tau = (p_y - p_x) \sin \alpha \cos \alpha$$

Aci însă neavând rezistenţă la lunecare, presupunând că materialul este de natură grăunţoasă, se va putea produce lunecare, când învingând frecarea părticelelor se va produce mişcare. Unghiul dat de

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{(p_y - p_x) \operatorname{tg} \alpha}{p_x + p_y \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

variind pentru diferite valori, poate deveni mai mare decât unghiul de frecare, şi atunci această frecare fiind învinsă, se va creia o suprafaţă de lunecare.

Vom scrie atunci condiţia de maxim anulând derivata

$$\frac{d \operatorname{tg} \beta}{d \alpha} = \frac{(p_x + p_y \operatorname{tg}^2 \alpha) - \operatorname{tg} \alpha . 2 p_y \operatorname{tg} \alpha}{(p_x + p_y \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} (\operatorname{tg} \alpha)' = 0$$

care ne duce la

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{p_x}{p_y}}$$

iar maximul îl obţinem înlocuind aceasta în expresia tangentei

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(p_y - p_x) \sqrt{\frac{p_x}{p_y}}}{p_x + p_y \frac{p_x}{p_y}} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_y}{p_x} - 1 \right) \sqrt{\frac{p_x}{p_y}}$$

Alunecarea se va putea produce când

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \operatorname{tg} \varphi = f$$

Cele două presiuni p_x şi p_y le putem scrie

$$p_y = \gamma h \ , \ p_x = \gamma h \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Teoria aceasta a repartiţiei presiunilor în interiorul unui masiv nelimitat, nu se poate valorifica aşa uşor, pentru a ne duce la o metodă simplă de calcul. Un procedeu grafic a fost stabilit de către Mohr, dar nu s'a putut introduce, şi se calculează tot în metoda simplă dată mai sus.

Problema se pune astfel la determinarea presiunilor la tuneluri şi galerii de mină, când însă recurgem la date practice.

Cap. XIV. Sarcini dinamice.

135. **Modul de lucru al sarcinilor dinamice.** In calculele noastre am admis că sarcinile lucrează cu intensitate fixă, şi mai mult, ele lucrează încet, crescând dela zero până la valoarea finală. Acelaşi mod de lucru îl au şi rezistenţele şi deformaţiile, care pornind dela starea neîncărcată a corpului, cresc de la zero până la valoarea finală, pe care am învăţat să o determinăm.

Avem însă sarcini care lucrează deodată, cu intensitate mare, chiar cu viteză. In acest caz apar forţe de inerţie, viteza maselor care lovesc piesele se comunică acestora, se produce un schimb de energie şi prin aceasta se produc deformaţii şi deci rezistenţe, care au alte valori de cât cele găsite până acum.

Sub acţiunea acestor sarcini dinamice, rezistenţele luând valori mari, piesele se rup. Ruperea prin sarcini dinamice este diferită de aceia cunoscută sub sarcina statică, aspectul secţiei de rupere este altul, valoarea rezistenţelor este alta. Experienţele au arătat importanţa mare a acestor fenomene de deformaţie sub sarcină dinamică.

Sub acţiunea sarcinilor corpul se deformează, sub acţiunea rezistenţelor diferitele părticele din care e compus corpul se deformează şi rezultă astfel un lucru mecanic de deformaţie. Dacă valorile rezistenţelor nu au depăşit limita de elasticitate, atunci deformaţiile sunt legate cu rezistenţele prin legea elasticităţii, în primă aproximaţie legea de proporţionalitate a lui Hooke, şi fenomenul este reversibil, corpul redă lucrul mecanic înmagazinat, dacă forţele încetează să lucreze. Dacă depăşim însă limita de elasticitate se produc deformaţii permanente şi când sarcina variază, aceste deformaţii nu mai revin, fenomenul nu

este reversibil. La fiecare lovitură, deformaţiile permanente, ori cât de mici ar fi, se adună şi cu timpul devin supărătoare, atingem deformaţia maximă, piesa se rupe.

Pentru cazul sarcinilor dinamice noţiunea lucrului mecanic de deformaţie are deci o valoare deosebită şi limita până la care ne putem întinde este limita de elasticitate.

Lucrul mecanic de deformaţie ce poate fi înmagazinat într'un corp depinde de caracteristicile lui şi joacă un rol însemnat la transmiterea sarcinilor dinamice. După curba caracteristică a materialului putem determina lucrul mecanic de deformaţie până la rupere. Nu putem însă întrebuinţa cu folos de cât lucrul mecanic de deformaţie înmagazinat până la limita de elasticitate, căci peste aceasta deformaţiile permanente nereversibile nu ne permit să suportăm sarcini repetate.

Se ştie din mecanică cum o forţă ce lucrează asupra unui corp îi imprimă o mişcare, rezultând deci deplasarea lui cu o anumită viteză. Forţa poate să lucreze un timp foarte scurt şi atunci avem fenomenul percusiunilor. Deplasările sunt deformaţii şi au ca efect rezistenţe, care deci în acest caz variază cu timpul.

In studiul rezistenţelor nu ne interesează atât să studiem variaţia deformaţiilor şi rezistenţelor cu timpul, cât mai degrabă să găsim valorile maxime ale acestora la un moment dat. Se vor face şi ipoteze simplificatoare, pentru a obţine rezultatele pe căi mai simple.

136. Piesă supusă la o sarcină axială prin lovire. Dacă asupra unei piese exercităm un lucru mecanic, de ex. lovind cu un ciocan, aşa fel ca piesa să lucreze la întindere sau compresiune, se vor naşte rezistenţe distribuite după regula întinderii, uniform distribuite pe secţie, aceleaşi în toate secţiile, aşa încât lucrul mecanic de deformaţie va fi

$$L = \frac{\sigma^2}{2E} V = \frac{\sigma^2}{2E} \Omega l$$

Lucrul maxim ce îl poate înmagazina piesa este

$$L_{max} = \frac{\sigma_e^2}{2E} \Omega l$$

Rezistenţa care se va naşte în bară va fi

$$\sigma = \sqrt{\frac{2EL}{\Omega l}}$$

iar reacţiunea N pe care o suferă din partea reazemului va fi o forţă normală, dirijată după axa piesei,

$$N = \sigma \Omega = \sqrt{\frac{2EL\Omega}{l}}$$

Dacă deci este vorba de o unealtă care să lucreze prin lovire, daltă, dorn, este bine să avem o presiune mare, pentru a obţine efectul dorit. Este nevoe deci de o bară scurtă, cu secţie mare şi cu coeficient de elasticitate ridicat, pentru a obţine o reacţiune mare.

Dacă dorim a avea o transmisie printr'o tije şi reacţiunea să fie mică, luăm din contra o bară lungă, cu secţie mică; este cazul barelor de comandă la maşini.

Exemplu. O bară are lungimea $l = 150$ mm, diametru $\varnothing = 20$ mm, adică o secţie $\Omega = 3{,}14$ cm². Ea este lovită axial cu ciocanul cu $L = 1$ kgm.

Pentru oţel, $E = 2100000$ kg/cm², vom avea

$$N = \sqrt{\frac{2 \times 2100000 \times 100 \times 3{,}14}{15}} = 9380 \text{ kg.}$$

Pentru fontă, $E = 1000000$ kg/cm²

$$N = \sqrt{\frac{2 \times 1000000 \times 100 \times 3{,}14}{15}} = 6470 \text{ kg.}$$

Pentru duralumin, $E = 650000$ kg/cm²

$$N = \sqrt{\frac{2 \times 650000 \times 100 \times 3{,}14}{15}} = 5220 \text{ kg}$$

se vede că oţelul ne dă valorile cele mai mari pentru reacţiune şi că aceasta scade cu E al materialului.

Lucrul mecanic L care lucrează asupra barei poate să provină din lovirea unei mase m, cu o viteză v, adică să avem

$$L = \frac{1}{2} m v^2$$

In acest caz rezistenţa produsă în bară şi reacţiunea pe reazem vor fi

$$\sigma = v \sqrt{\frac{Em}{\Omega l}}$$

$$N = \sigma \Omega = v \sqrt{\frac{E \Omega m}{l}}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi se vede că reacţiunea este proporţională cu viteza de lovire.

Cantitatea $1/E\Omega$ este tocmai deformaţia barei sub o sarcină statică egală cu unitatea. Dacă o numim *flexibilitate* şi notăm

$$f = \frac{1}{E\Omega}$$

atunci vom putea scrie

$$N = v\sqrt{\frac{m}{f}}$$

In acest calcul am neglijat deformaţia reazemului, pe care l'am considerat rigid şi am neglijat deasemenea şi elasticitatea masei m. Această masă însă este relativ mică faţă de bară, şi deşi avem un rezultat aproximativ, el este acoperitor.

Fenomenul mecanic ce se produce aci este următorul. Masa m are viteza v, iar piesa are viteza nulă. In momentul lovirii masa comunică viteza ei, extremitatea barei se pune în mişcare, piesa se comprimă, se nasc rezistenţe care se opun mişcării, deci o acceleraţie negativă care micşorează viteza v. Este prima parte a loviturii în care deplasarea creşte, viteza v scade, acceleraţia negativă creşte, până când viteza se anulează. In acest moment deplasarea e maximă ca şi acceleraţia.

Incepe a doua parte a loviturii în care, sub acţiunea forţelor elastice ce s'au născut în bară, scurtarea barei se micşorează, viteza creşte în sens contrar, bara revine la loc şi când deplasarea s'a anulat masa îşi recapătă viteza v, sărind şi despărţindu-se de bară.

Acceleraţia ce se produce este la un moment dat

$$a_1 = \frac{N_1}{m} = \frac{\sigma_1 \Omega}{m}$$

iar deplasarea este

$$\Delta l = \frac{N_1 l}{E\Omega}$$

deci raportul

$$\frac{a_1}{\Delta l} = \frac{E\Omega}{ml} = \text{const.}$$

ceeace caracterizează o mişcare oscilatorie, a cărei perioadă este

$$2\pi\sqrt{\frac{m\,l}{E\,\Omega}}$$

Să luăm o bară compusă din două bucăţi $\Omega_1\,l_1$, $\Omega_2\,l_2$, care ar primi axial o lovitură L (fig. 220). Vom avea

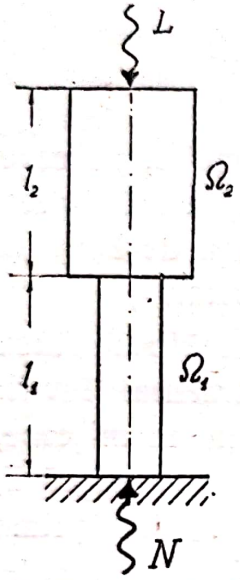


Fig. 220

$$L = L_1 + L_2 = \frac{\sigma^2_1}{2E}\,\Omega_1\,l_1 + \frac{\sigma^2_2}{2E}\,\Omega_2\,l_2$$

şi condiţia

$$\sigma_1\,\Omega_1 = \sigma_2\,\Omega_2$$

de aci vom putea scrie

$$L = \frac{\sigma^2_1}{2E}\left(\Omega_1\,l_1 + \frac{\Omega^2_1}{\Omega_2}\,l_2\right),\quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{2\,E\,L\,\Omega_2}{\Omega_1\Omega_2\,l_1 + \Omega_1^2\,l_2}}$$

$$L = \frac{\sigma^2_2}{2E}\left(\Omega_2\,l_2 + \frac{\Omega^2_2}{\Omega_1}\,l_1\right),\quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{2\,E\,L\,\Omega_1}{\Omega_1\Omega_2\,l_2 + \Omega^2_1\,l_1}}$$

de unde reacţiunea

$$N = \sigma_1\,\Omega_1 = \sqrt{\frac{2\,E\,L\,\Omega_2\,\Omega_1}{\Omega_2\,l_1 + \Omega_1\,l_2}}$$

Dacă comparăm reacţiunea găsită N cu reacţiunea unei bare de secţie constantă Ω_1 şi de lungime $l_1 + l_2$, vom avea cum am văzut

$$N' = \sqrt{\frac{2\,E\,L\,\Omega_1}{l_1 + l_2}}$$

dacă comparăm cele două reacţiuni vedem că $N > N'$, ceeace înseamnă că piesa de secţie constantă are o reacţiune mai mică şi o rezistenţă mai mică. Deci prin îngroşarea în partea de sus a secţiei Ω_2, am sporit rezistenţele în secţia mică Ω_1.

Să considerăm bara noastră de secţie variabilă şi supusă la o lovitură L. Vom avea

$$dL = \frac{\sigma_x^2}{2E}\,\Omega_x\,dx$$

$$\sigma_x\,\Omega_x = \sigma_1\,\Omega_1$$

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_x} = \frac{a^2}{x^2}$$

$$L = \frac{\sigma_1^2 \Omega_1 a^2}{2E} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = \frac{\sigma_1 \Omega_1 a l}{2E(a+l)}$$

de unde rezultă

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2EL(a+l)}{\Omega_1 a l}}$$

iar reacţiunea reazemului este

$$N = \sigma_1 \Omega_1 = \sqrt{\frac{2EL\Omega_1}{l}\left(1 + \frac{l}{a}\right)}$$

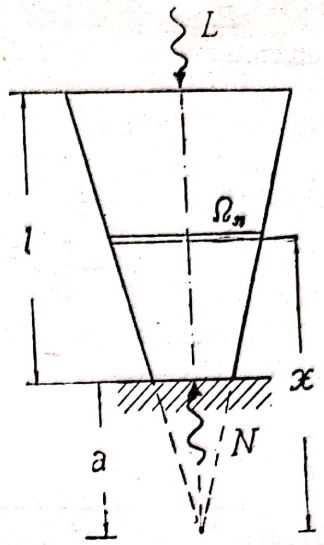


Fig. 221

Dacă comparăm cu reacţiunea ce am obţinut la bara de secţie constantă, vedem că pentru bara de secţie variabilă avem o reacţiune mai mare. In acest fel se fac uneltele de lovire, daltă, dorn, etc., pentru a avea o presiune mare.

137. Piesă supusă la un moment de răsucire prin lovire. Dacă asupra unei piese exercităm un lucru mecanic printr'un moment de răsucire se vor naşte rezistenţe distribuite după regula răsucirii, nule în axă, maxime la margine, aceleaşi în toate secţiile. Lucrul mecanic va fi

$$L = \int \frac{\tau^2}{2G} dV = \frac{\tau_m^2 I_p l}{2G a^2}$$

valabil pentru secţia circulară, în care τ_m este rezistenţa maximă la margine, a este raza cercului secţiei, I_p momentul de inerţie polar al cercului de rază a.

Lucrul maxim ce îl poate înmagazina piesa este

$$L_{max} = \frac{\tau_e^2 I_p l}{2G a^2}$$

Rezistenţa ce se naşte în bară este

$$\tau = \sqrt{\frac{2GLa^2}{I_p l}}$$

Reacţiunea ce o suferă reazemul este un moment

$$M = \frac{I_p \tau}{a} = \sqrt{\frac{2GLI_p}{l}}$$

se observă analogie cu cazul întinderii, în formulă intrând aceleaşi elemente, numai E, Ω, fiind înlocuite cu G, I_p.

Exemplu. O bară de oţel ∅ 50 mm, de lungime $l = 150$ cm, primeşte un moment cu o lovitură $L = 10$ kgm. Rezistenţa ce se va naşt în bară va fi

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \times 850000 \times 1000 \times 2{,}5^2}{150 \times 61{,}36}} = 1070 \text{ kg/cm}^2$$

momentul la reazem este

$$M = \sqrt{\frac{2 \times 850000 \times 1000 \times 61{,}36}{150}} = 26400 \text{ kgcm}$$

Dacă bara ar fi fixată printr'o pană, atunci aceasta ar fi supusă la o forţă tăietoare

$$T = \frac{M}{a} = \frac{26400}{2{,}5} = 10560 \text{ kg}$$

Lucrul mecanic de deformaţie maxim ce ar putea fi înmagazinat de această bară, luând limita de elasticitate $\sigma_e = 4000$ kg/cm², $\tau = 0{,}8\ \sigma$, este

$$L_{max} = \frac{3200^2 \times 61.36 \times 150}{2 \times 850000 \times 2{,}5^2} = 8880 \text{ kgcm.}$$

138. Piesă supusă la încovoiere prin lovituri. Dacă asupra unei grinzi rezemată pe două reazeme exercităm un lucru mecanic, piesa va lucra la încovoiere. Rezistenţele vor fi distribuite pe diferite secţii după formula lui Navier, iar în grindă după distribuţia momentelor încovoietoare, adică liniar.

Lucrul mecanic va fi

$$L = \int \frac{\sigma^2}{2E} dv$$

Rezistenţa se va putea exprima în cele două secţii (fig. 222) momentul variind liniar

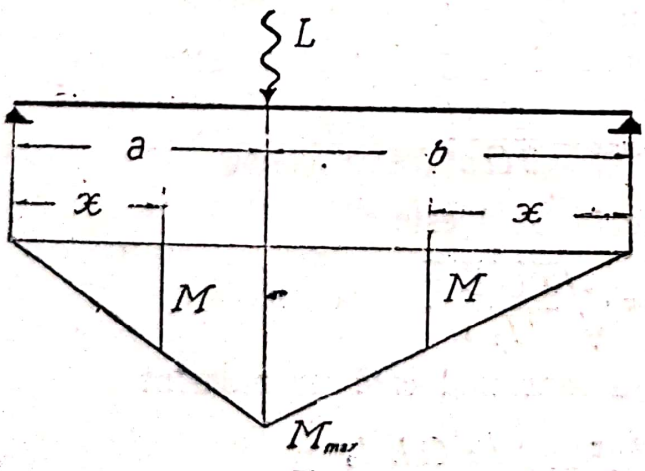


Fig. 222

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{y}{I}\frac{M_{max}}{a}x$$

$$= \frac{y}{I}\frac{M_{max}}{b}x'$$

şi deci vom avea

$$L = \frac{1}{2E}\int \frac{y^2}{I^2}\, d\Omega\, \frac{M^2_{max}}{b^2} x'^2\, dx' + \frac{1}{2E}\int \frac{y^2}{I^2}\, d\Omega\, \frac{M^2_{max}}{a^2} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2E}\frac{M^2_{max}}{3I}(a+b) = \frac{M^2_{max}\, l}{6EI}$$

deci nu depinde de cât de momentul maxim, locul sarcinei apărând în valoarea momentului încovoietor.

Rezultatul este interesant căci ne arată că pentru a atinge prin o lovitură un moment maxim în grindă, putem aplica această lovitură oriunde. Valoarea momentului maxim ce-l poate suporta grinda este

$$M_{max} = \sqrt{\frac{6EIL}{l}}$$

şi se vede că acest moment încovoietor maxim este cu atât mai mare cu cât l este mai mic. Cu alte cuvinte pentru a rupe o bară putem să-i aplicăm o lovitură, rezemând-o pe două reazeme apropiate. Este mijlocul ce se întrebuinţează pentru a sparge blocurile de fontă sau de piatră.

Reacţiunile pe reazeme vor fi

$$A = \frac{M}{a} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{6EIL}{l}}$$

$$B = \frac{M}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{6EIL}{l}}$$

iar rezistenţa ce se va naşte în grindă este

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{M_{max}\, h_1}{I} = \sqrt{\frac{6EL h_1^2}{Il}}$$

Sarcina P echivalentă, care ar produce acest efect se poate calcula

$$P = \frac{M\, l}{a\, b} = \sqrt{\frac{6EIL\, l}{a^2 b^2}}$$

Dacă $L = \frac{1}{2} m v^2$, vom avea

$$P = v\sqrt{\frac{3EIlm}{a^2 b^2}} = v\sqrt{\frac{m}{f}}$$

în care f este săgeata obţinută pentru o sarcină egală cu unitatea

$$f = \frac{a^2 b^2}{3EIl}$$

139. **Comparaţie între diferitele încărcări.** Să luăm o piesă circulară de diametru d, de lungime l, supusă la lovituri prin întindere, răsucire, încovoiere şi să calculăm lucrul mecanic de deformaţie ce-l poate înmagazina până la limita de elasticitate. Vom avea

la întindere

$$L_{max} = \frac{\sigma_e^2}{2E}\,\Omega\, l = \frac{\sigma_e^2}{2E}\,V$$

la răsucire

$$L_{max} = \frac{\tau_e^2\, I_p\, l}{2G\, a^2}$$

în care

$$\frac{I_p}{a^2} = \frac{\pi d^2}{32}\,\frac{4}{d^2} = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\Omega}{2}$$

deci

$$L_{max} = \frac{\tau_e^2}{2G}\,\frac{V}{2}$$

la încovoiere

$$L_{max} = \frac{\sigma_e^2\, I\, l}{6E\, h_1^2}$$

în care

$$\frac{I}{h_1^2} = \frac{\pi d^4}{64}\,\frac{4}{d^2} = \frac{\pi d^2}{16} = \frac{\Omega}{4}$$

deci

$$L_{max} = \frac{\sigma_e^2}{2E}\,\frac{V}{12}$$

Dacă ţinem cont că $\tau_e = 0{,}8\,\sigma_e$ şi $G = 0{,}385\,E$ atunci vom găsi pentru răsucire

$$L_{max} = \frac{0{,}64\,\sigma_e^2}{2\times 0{,}385\,E}\,\frac{V}{2} = 0{,}83\,\frac{\sigma_e^2}{2E}\,V$$

Dacă piesa este circulară goală, diametrele fiind D, d, vom avea în acelaş mod

la întindere

$$L_{max} = \frac{\sigma_e^2}{2E}\,V$$

la răsucire

$$L_{max} = \frac{\tau_e^2}{2G}\frac{V}{2}\frac{D^2 + d^2}{D^2}$$

la încovoiere

$$L_{max} = \frac{\sigma_e^2}{2E}\frac{V}{12}\frac{D^2 + d^2}{D^2}$$

şi făcând aceiaşi înlocuire pentru răsucire

$$L_{max} = 0{,}83\frac{\sigma_e^2}{2E}V\frac{D^2 + d^2}{D^2}$$

Se vede că pentru un tub foarte subţire, la limita $D = d$, lucrul maxim de deformaţie îl va avea piesa la torsiune. Deci resortul la torsiune, făcut într'un fir gol, are cel mai mare lucru mecanic înmagazinat la lovire.

140. **Factorul dinamic n.** Când sarcinile nu lucrează în mod static, adică crescând încet dela valoarea zero la valoarea finală, ci dinamic, adică lucrând cu intensitatea lor în mod brusc, efectele lor sunt mărite. Săgeata produsă în asemenea cazuri va fi mai mare, adăugându-se o parte numită dinamică

$$f = f_s + f_d$$

ceea ce se poate scrie

$$f = f_s\left(1 + \frac{f_d}{f_s}\right) = n f_s$$

Se poate deci spune că săgeata produsă în cazul dinamic este aceea pentru cazul static înmulţită cu coeficientul n, care ia numele de *factorul dinamic.*

Cu acest coeficient vom înmulţi şi rezistenţa produsă de sarcina ce lucrează static pentru a afla rezistenţa produsă de sarcina dinamică, sau vom afla rezistenţele şi săgeţile ce ne interesează pentru cazul dinamic, luând sarcina n P.

Să luăm ca exemplu o grindă şi o sarcină P care cade de la înălţimea h. Lucrul mecanic format din energia de cădere $L_o = P h$, la care se adaugă lucrul $P f$ când sarcina loveşte grinda şi produce săgeata f, se înmagazinează sub formă de lucru mecanic de deformaţie

$$P h + P f = \frac{1}{2E}\int \sigma^2 d V$$

ori avem $f = n f_s, \sigma = n \sigma_s$, iar pentru cazul static

$$L_s = \frac{1}{2} P f_s = \frac{1}{2E} \int \sigma_s^2 \, d V$$

şi înlocuind

$$L_o + 2 L_s n = n^2 L_s$$

de unde scoatem

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{L_o}{L_s}}$$

In cazul când $L_o = 0$, adică sarcina lucrează brusc, fără viteză iniţială, $n = 2$ deci rezistenţele şi deformaţiile se dublează.

In cazul când L_o are o valoare oarecare, atunci energia este în legătură cu viteza, care depinde de masa corpului lovit şi de a corpului care loveşte. La această lovire ştim că se pierde energie şi putem calcula pierderea.

Dacă sarcina P căzând dela înălţimea h, deci luând viteza $v_o^2 = 2 g h$, va lovi grinda, se va face un schimb de viteze şi punctul de lovire care era în repaos va lua viteza v. Teorema cantităţilor de mişcare ne dă

$$v_o P + 0 . \int p \, d x = v P + \int p \, v_x \, d x = v \left(P + p \int \frac{v_x}{v} \, d x \right)$$

în care notăm cu v_x viteza unui punct oarecare de pe grindă.

Dacă în integrala noastră înmulţim cu t, vom avea $v_x t = f_x$, $v t = f$, deci raportul a două săgeţi, aşa în cât vom scrie

$$p \int \frac{v_x}{v} \, d x = p \, l \, k_1$$

în care k_1 este un coeficient care reduce greutatea grinzii $p \, l$. Deducem

$$v = \frac{v_o P}{P + p \, l \, k_1}$$

Grinda cu sarcina P, cu viteza v, va oscila iar deformaţia înmagazinată sub formă de lucru mecanic de deformaţie este

$$L = \frac{1}{2 g} \left(P v^2 + \int p \, v_x^2 \, d x \right) = \frac{v^2}{2 g} \left(P + \int p \, \frac{v_x^2}{v^2} \, d x \right)$$

şi pentru integrala aceasta găsim în acelaş mod

$$p\int \frac{v_x^2}{v^2}\,dx = p\,l\,k_2$$

şi deci

$$L = \frac{v^2}{2g}(P + p\,l\,k_2) = \frac{P^2 h(P + p\,l\,k_2)}{(P + p\,l\,k_1)^2}$$

de unde

$$L = L_o \frac{P(P + p\,l\,k_2)}{(P + p\,l\,k_1)^2} = k\,L_o$$

aşa încât coeficientul dinamic este

$$n = 1 + \sqrt{1 + k\frac{L_o}{L_s}}$$

Exemplu. Să calculăm factorul dinamic precum şi rezistenţele ce se produc într'o grindă sub lovitura produsă de căderea unei sarcini. Să luăm o grindă *I* 28, cu o deschidere de 4,00 m, sub lovitura produsă de căderea unei greutăţi de 500 kg de la o înălţime de 10 cm.

Dasă sarcina ar lucra static, am avea

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{500 \times 400}{4 \times 542} = 92 \text{ kg/cm}^2$$

Lucrul mecanic produs de sarcină este

$$L_o = 500 \times 10 = 5000 \text{ kg cm}$$

Lucrul mecanic de deformaţie static înmagazinat în grindă este

$$L_s = \frac{1}{2} 500 \frac{500 \times 400^3}{48 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 7590} = 10{,}4 \text{ kg cm}$$

Calculăm coeficienţii k_1 şi k_2

$$k_1 = \frac{1}{l} 2 \int_o^{\frac{l}{2}} 3\left[\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right] dx = \frac{5}{8}$$

$$k_2 = \frac{1}{l} 2 \int_o^{\frac{l}{2}} 9\left[\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]^2 dx = \frac{17}{35}$$

şi deci

$$k = \frac{500\left(500 + 4 \times 48\frac{17}{35}\right)}{\left(500 + 4 \times 48\frac{5}{8}\right)^2} = 0{,}77$$

şi atunci factorul dinamic este

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{0{,}77 \times 5000}{10{,}4}} = 20{,}52$$

şi deci rezistenţa în grindă va fi

$$\sigma' = n\sigma = 20{,}52 \times 92 = 1888 \text{ kg/cm}^2.$$

Dacă luăm în considerare, pe lângă greutatea grinzii, şi greutatea planşeului susţinut de aceste grinzi, vom avea pentru bolţişoare de cărămidă de 30 cm şi pe o lăţime de 1 m distanţă între grinzi, o greutate de $0{,}30 \times 1{,}00 \times 1600 = 480$ kg/ml, la care adăogând greutatea proprie a grinzii rezultă 530 kg/ml.

Vom avea deci

$$k = \frac{500\left(500 + 4 \times 530\frac{17}{35}\right)}{\left(500 + 4 \times 530\frac{5}{8}\right)^2} = 0{,}435$$

şi atunci factorul dinamic este

$$n = 1 + \sqrt{1 + \frac{0{,}435 \times 5000}{10{,}4}} = 15{,}49$$

şi deci rezistenţa în grindă va fi

$$\sigma' = n\sigma = 15{,}49 \times 92 = 1425 \text{ kg/cm}^2$$

Se vede că masa planşeului a absorbit o parte din lucrul mecanic şi în acest fel rezistenţele în grindă au fost micşorate prin micşorarea coeficientnlui dinamic. Aceasta va avea însă desigur ca urmare crăpături în zidăria de cărămidă.

Cap. XV. Sisteme static nedeterminate.

141. Definiţii. Până acum ne-am ocupat de construcţiile în care cunoaştem sarcinile date şi putem afla reacţiunile prin condiţiile de echilibru. La sistemele de bare am pus chiar condiţia, care trebue să o avem între numărul nodurilor şi al barelor, pentru ca construcţia să fie static determinată.

Putem însă avea construcţii în care legăm între ele bare prin noduri rigide, în care barele sunt împiedicate de a se roti liber şi nu pot avea decât deplasările permise de elasticitatea lor şi a legăturilor. In acest caz apar în noduri noi necunoscute ce trebuiesc determinate pentru a putea calcula eforturile şi a dimensiona construcţia.

Tot aşa putem lega construcţia cu reazemele prin legături mai multe sau de diferite feluri, şi atunci numărul reacţiunilor necunoscute creşte şi nu le mai putem afla din ecuaţiile statice de echilibru.

Avem atunci sisteme static nedeterminate.

Putem avea sisteme în care numărul reacţiunilor este mai mare de cât al ecuaţiilor şi deci vom avea reacţiuni static nedeterminate. Avem asemenea sisteme simplu, dublu, triplu static nedeterminate, după numărul necunoscutelor. Nedeterminarea este deci în exterior, în modul de rezemare şi de aceia se zic şi exterior static nedeterminate. Dacă suprimăm din reazemele acestea şi micşorăm astfel numărul necunoscutelor, reducem construcţia la un sistem static determinat.

Avem alte sisteme în care reazemele sunt în numărul necesar pentru calculul static, deci putem afla reacţiunlle. Dar avem un număr mai mare de bare, aşa încât nedeterminarea este în interior, de aceia ele se zic interior static nedeterminate.

Scanned with OKEN Scanner

Putem oricând să înlocuim un reazem prin barele care-l închipuie, bare pe care le socotim pe urmă înglobate în sistemul nostru, aşa fel în cât sistemul va deveni interior static nedeterminat.

Construcţiile în care barele sunt legate între ele prin noduri rigide li se dă denumirea de *cadre*. Ele sunt foarte întrebuinţate în construcţii, unde găsim toate combinaţiile posibile între stâlpi şi grinzi orizontale, care formează reţeaua de rezistenţă a unei clădiri. Barele ce formează cadrele pot fi drepte sau curbe.

Când grinzile sunt curbe ele iau denumirea de *arce*. Această denumire nu se dă atât după formă, cât după modul cum lucrează forţele şi reacţiunile. Totuşi sunt grinzi curbe care intră sub denumirea cadrelor.

Pentru anumite construcţii curbe se întrebuinţează şi denumirea de *bolţi*.

Pentru scrierea ecuaţiilor de condiţie, care alături de ecuaţiile din statică să ne determine necunoscutele ne servim de deformaţie. In loc însă de a scrie în fie care caz deformaţia, ne servim de câte va teoreme generale, pe care le stabilim cu ajutorul lucrului mecanic de deformaţie.

§ 1. Teoria generală a grinzilor.

142. Lucrul mecanic. Ne servim de expresia lucrului mecanic pentru a stabili legătura între sarcini şi săgeţile produse. Inainte de a stabili teoremele generale, vom reaminti expresia lucrului mecanic pentru diferite încărcări.

Lucrul de deformaţie specific este $\sigma^2 : 2E$, şi pentru a afla lucrul mecanic de deformaţie înmagazinat în toată bara, nu avem decât să facem suma tuturor lucrurilor elementare. Dacă înlocuim valoarea rezistenţei σ prin expresia cunoscută pentru diferite încărcări avem

întindere $$\int \frac{1}{2E} \frac{N^2}{\Omega^2} dV = \int \frac{N^2}{2E\Omega} dx$$

încovoiere $$\int \frac{1}{2E} \frac{M_i^2 y^2}{I^2} dV = \int \frac{M_i^2}{2EI} dx$$

tăiere $$\int \frac{1}{2G}\frac{k\,T^2}{\Omega^2}\,dV=\int\frac{k\,T^2}{2G\Omega}\,dx$$

răsucire $$\int \frac{1}{2G}\frac{M_t\,r^2}{I_p^2}\,dV=\int\frac{M_t^2}{2GI_p}\,dx$$

Pentru cazul temperaturii putem să asemănăm deformaţia cu întinderea şi încovoierea. Nu se produce în acest caz lucru mecanic, de cât dacă există forţe care se opun la dilatare, şi vom avea

$$\int\sigma\left(\alpha t_o+\alpha\Delta t\,\frac{y}{h}\right)dV=\int\alpha t_o\,N\,dx+\int\alpha\Delta t\,\frac{M}{h}\,dx$$

Intr'un caz general când vom avea toate încărcările suprapuse lucrurile mecanice se vor aduna. Vom avea deci

$$L=\int\frac{N^2}{2E\Omega}\,dx+\int\frac{M^2}{2EI}\,dx+\int\frac{k\,T^2}{2G\Omega}\,dx+\int\frac{M_t^2}{2GI_p}\,dx+$$
$$+\int\alpha t_o\,N\,dx+\int\alpha\Delta t\,\frac{M}{h}\,dx$$

Lucrul mecanic înmagazinat în interiorul corpului este produs de sarcinile exterioare care lucrează. Aceste sarcini produc săgeţi şi deci putem în acelaşi mod exprima lucrul mecanic exterior produs de sarcinile P, care au săgeţile y.

$$L=\tfrac{1}{2}\Sigma\,Py$$

Cele două lucruri mecanice exterior şi interior sunt egale, o formă a principiului energiei cunoscut din mecanică.

$$L=\tfrac{1}{2}\Sigma\,Py=\tfrac{1}{2}\int\sigma\,\varepsilon\,dV$$

Exemplu. O grindă rezemată pe două reazeme, de deschidere l, este încărcată la mijloc cu o sarcină P, care ne dă o săgeată f. Vom avea

$$L=\tfrac{1}{2}Pf=\int\frac{M^2}{2EI}\,dx$$

M variază după un triunghiu $M=Px:2$, simetric pentru $l:2$, deci

$$\tfrac{1}{2}Pf=\frac{2}{2EI}\int_o^{\frac{l}{2}}\frac{P^2}{4}x^2\,dx=\frac{2}{2EI}\,\frac{P^2}{4}\,\frac{l^3}{3\times 8}$$

de unde avem săgeata cunoscută

$$f = \frac{P l^3}{48 E I}$$

143. Teoremele lui Castigliano. Să luăm o grindă rezemată pe două reazeme şi încărcată cu sarcinile $P_1, P_2, \ldots P_n$, (fig. 223). Grinda se va deforma şi va lua diferite săgeţi în dreptul sarcinilor $y_1, y_2, \ldots y_n$. Prin aceasta lucrul mecanic exterior este

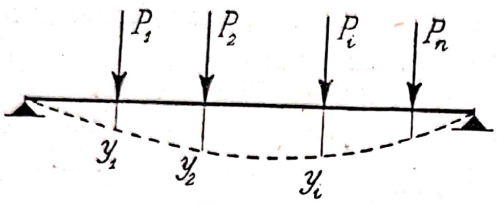


Fig. 223

$$L = \tfrac{1}{2} \Sigma P y$$

Dacă una din sarcini P_i creşte cu dP_i lucrul mecanic creşte cu dL, căci vor creşte prin încărcare toate săgeţile y în dreptul fiecărei sarcini cu dy.

$$dL = \Sigma P\, dy + \tfrac{1}{2}\, dP_i\, dy_i$$

în care termenul al doilea, fiind un infinit mic de ordin superior, poate fi neglijat.

Derivând însă prima ecuaţie, şi privind-o ca o funcţie de sarcini şi de săgeţi, avem

$$dL = \tfrac{1}{2} \Sigma P\, dy + \tfrac{1}{2} \Sigma y\, dP$$

şi din combinaţia acestor două deducem

$$dL = \Sigma P\, dy = \Sigma y\, dP$$

Dacă acum punem creşterea lucrului mecanic sub forma

$$dL = \frac{dL}{dP_i}\, dP_i$$

vom deduce comparând cu cea de mai sus

$$\frac{dL}{dP_i} = y_i$$

care formează prima teoremă a lui Castigliano şi se enunţă astfel: *derivata lucrului mecanic de deformaţie în raport cu una din sarcini este egală cu deplasarea acelei sarcini.*

De asemenea putem scrie creşterea lucrului mecanic şi sub forma

$$dL = \Sigma \frac{dL}{dy_i}\, dy_i$$

ceea ce ne duce la relaţia

$$\frac{dL}{dy_i} = P_i$$

şi care se anunţă astfel: *derivata lucrului mecanic de deformaţie în raport cu deplasarea unui punct este egală cu sarcina ce lucrează în acel punct.*

Aceste teoreme ale lui Castigliano ne dau deci mijlocul de a calcula săgeţile, când sistemul este static determinat deci cunoaştem sarcinile care lucrează, sau sarcinile static nedeterminate cu ajutorul derivatelor lucrului mecanic de deformaţie.

Să aplicăm această teoremă la una din reacţiunile sistemului, nedeterminată prin statică şi pe care o numim X. Dacă reazemul este rigid, atunci deplasarea este zero şi vom scrie

$$\frac{dL}{dX} = 0$$

In acest caz însă, dacă derivata este zero, înseamnă că lucrul mecanic este minim sau maxim. In cazul nostru este întotdeauna minim. Avem astfel enunţul celei de a doua teoreme a lui Castigliano: *reacţiunile static nedeterminate fac lucrul de deformaţie minim.*

Vom putea scrie această relaţie desvoltat

$$\frac{dL}{dX} = \int \frac{N}{E\Omega}\frac{dN}{dX}dx + \int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dX}dx + \int \frac{kT}{G\Omega}\frac{dT}{dX}dx + \ldots = 0$$

şi vom putea avea atâtea relaţii câte necunoscute nedeterminate prin statică avem. Aceste relaţii ne servescla calculul reacţiunilor.

Exemplu. 1. Să aflăm săgeata la mijloc a unei grinzi rezemată pe două reazeme, încărcată în mijloc cu sarcina P. Vom avea

$$y = \frac{dL}{dP} = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{EI}{M}\frac{dM}{dP}dx$$

şi cunoscând variaţia momentului încovoietor şi derivata

$$M = \frac{P}{2}x, \qquad \frac{dM}{dP} = \frac{x}{2}$$

vom găsi

$$y = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Px}{2}\frac{x}{2}dx = \frac{2}{EI}\frac{P}{4}\frac{l^3}{3\,8} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

2. O grindă înţepenită la un capăt şi rezemată la celălalt este încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Să se afle reacţiunea nedeterminată prin statică.

Alegem ca necunoscută reacţiunea reazemului mobil şi o numim X. Obţinem atunci o grindă static determinată şi putem scrie momentul încovoietor

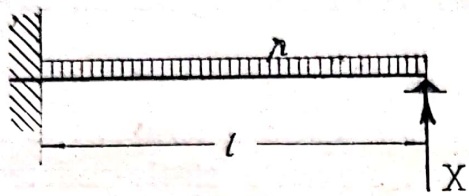


Fig. 224

$$M = Xx - \frac{px^2}{2} \qquad \frac{dM}{dX} = x$$

şi teorema a doua a lui Castigliano ne dă

$$\frac{dL}{dX} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{dM}{dX}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(Xx - \frac{px^2}{2}\right)x\,dx = 0$$

care integrată şi rezolvată ne dă

$$X = \frac{3}{8}pl$$

144. Principiul lucrului virtual. Spre deosebire de cele cunoscute în mecanică unde se dă o deplasare virtuală, în rezistenţă vom lua o sarcină virtuală, pe care o notăm cu $\overline{P}$ şi o luăm egală cu unitatea. Lucrul mecanic corespunzător acestor sarcini este un lucru virtual, la această forţă virtuală corespund reacţiuni, rezistenţe şi deformaţii virtuale. Dacă considerăm săgeţile şi deformaţiile reale care se nasc sub sarcinile date care lucrează pe grindă, din produsul acestora va eşi lucrul mecanic virtual produs de o forţă virtuală pe deplasarea reală, dată. Vom avea atunci

$$\overline{L} = \overline{1}.y + \Sigma\,\overline{A}\,\Delta\,a = \int \overline{\sigma}\,\varepsilon\,dV$$

Lucrul mecanic interior îl aflăm înlocuind

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t_0 + \alpha\,\Delta t\,\frac{y}{h}$$

ceiace ne duce la

$$\int \overline{\sigma}\,\varepsilon\,dV = \int \frac{\overline{\sigma}\,\sigma}{E}\,dV + \int \overline{\sigma}\,\alpha t_0\,dV + \int \overline{\sigma}\,\alpha\,\Delta t\,\frac{y}{h}$$

Dacă notăm cu $\overline{N}$, $\overline{T}$, $\overline{M}$, $\overline{M}_t$, elementele virtuale produse de încărcarea virtuală $\overline{P} = 1$, atunci putem să scrim expresia lucrului virtual

$$\int \overline{\sigma}\,\varepsilon\, dV = \int \frac{N\overline{N}}{E\Omega} dx + \int \frac{M\overline{M}}{EI} dx + \int \frac{k\,T\overline{T}}{G\Omega} dx +$$

$$+ \int \frac{M_t\,\overline{M}_t}{G\,I_p} dx + \int \alpha\, t_0\, \overline{N} dx + \int \alpha\, \Delta t\, \frac{\overline{M}}{h} dx$$

Această relaţie ne dă un mijloc uşor de a calcula pe y, adică săgeata într'un punct oarecare, dacă cunoaştem lucrul mecanic al reacţiunilor. Un caz simplu este acela când reazemele sunt rigide şi lucrul reacţiunilor nul.

Aceiaşi relaţie ne serveşte şi pentru a găsi reacţiunile necunoscute, în cazul când ele sunt nedeterminate prin statică. In acest caz facem toate sarcinile egale cu zero şi toate reacţiunile nedeterminate egale cu zero, afară de una $X_a = 1$. Relaţia ne dă atunci

$$\overline{X}_a\, \Delta a = \int \overline{\sigma}\,\varepsilon\, dV$$

şi dacă reazemul e rigid primul membru este nul, şi putem afla necunoscuta. Dacă cunoaştem lăsarea reazemului Δa, atunci din aceiaşi relaţie găsim pe X_a.

Exemple. 1. O bară de secţie Ω este întinsă cu forţa N. Să aflăm lungirea barei.

Pentru aceasta vom lua o sarcină virtuală $\overline{N} = 1$, care ne dă

$$y = \int \frac{\overline{N}N}{E\Omega} dx = \frac{N\,l}{E\Omega}$$

formula cunoscută din primele lecţii.

2. Să aflăm săgeata la mijloc a unei grinzi rezemată pe două reazeme, încărcată la mijloc cu sarcina P.

Vom lua momentul încovoietor M produs de sarcina reală şi momentul virtual $\overline{M}$ produs de sarcina virtuală $\overline{P} = 1$, care lucrează chiar în punctul unde vrem să aflăm săgeata

$$M = \frac{P}{2} x, \qquad \overline{M} = \frac{x}{2}$$

şi deci

$$y = \int \frac{M\overline{M}}{E\overline{I}} dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{EI} \frac{Px}{2} \frac{x}{2} dx = \frac{P\,l^3}{48\,EI}$$

3. O grindă înţepenită la un capăt şi rezemată la celălalt este încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Să se afle reacţiunea static nedeterminată X a reazemului.

Vom lua în reazemul mobil unde lucrează reacţiunea static nedeterminată o forţă virtuală $\overline{P} = 1$.

$$M = X x - \frac{p x^2}{2} \quad , \quad \overline{M} = x$$

aşa că vom găsi, reazemul fiind rigid

$$\int_0^l \left(X x - \frac{p x^2}{2}\right) x \, dx = 0$$

de unde aflăm

$$X = \frac{3}{8} p l$$

valoare pe care o cunoaştem.

Dacă reazemul în loc să fie rigid ar fi de ex. o coloană care se deformează ea însăşi sub încărcarea reacţiunii X, avem o lăsare

$$\Delta l = \frac{E_1 \Omega_1}{X h}$$

în care h este înălţimea coloanei, Ω_1 secţia coloanei şi E_1 coeficientul de elasticitate al materialului. Cum lăsarea este în jos şi reacţiunea în sus lucrul mecanic este negativ şi scriem

$$-\Delta l = -\frac{X h}{E_1 \Omega_1} = \int \frac{M \overline{M}}{E I} dx = \int_0^l \frac{1}{E I} \left(X x - \frac{p x_2}{2}\right) x \, dx$$

de unde scoatem

$$X = \frac{3 p l}{8 + \frac{8 h}{3 l^3} \frac{E I}{E_1 \Omega_1}}$$

deci reacţiunea este mai mică de cât în cazul când reazemul este rigid.

145. **Teorema lui Maxwell.** Să luăm pentru exemplificare o grindă încărcată numai cu două sarcini şi să exprimăm sub o altă formă săgeţile produse.

In general, după cum am văzut, săgeata unui punct de pe grindă este proporţională cu sarcina ce a produs-o, şi atârnă de locul unde lucrează sarcina şi de locul unde căutăm săgeata. Putem deci spune pe scurt

$$y_i = \delta_{ik} P_k$$

Scanned with OKEN Scanner

în care δ_{ik} este *coeficientul de influenţă* asupra săgeţii produsă în i de sarcina ce lucrează în k. Cu aceste notaţii săgeata produsă în i de forţa ce lucrează în i este $\delta_{ii} P_i$ iar săgeata produsă în k de forţa ce lucrează în i este $\delta_{ki} P_i$.

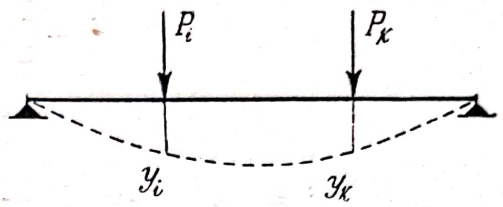


Fig. 225

Să luăm acum grinda noastră încărcată cu două sarcini P_i, P_k şi să scrim lucrul mecanic (fig. 225). Când am încărcat grinda întâi cu sarcina P_i s'a produs în i o săgeată $\delta_{ii} P_i$ şi deci un lucru mecanic $\frac{1}{2} \delta_{ii} P_i^2$. Dacă încărcăm acum grinda cu P_k, în punctul k, se va lăsa din nou punctul i cu săgeata $\delta_{ik} P_k$ şi deci un nou lucru mecanic $\delta_{ik} P_k P_i$ şi se va lăsa şi punctul k, cu săgeata $\delta_{kk} P_k$, deci lucrul mecanic $\frac{1}{2} \delta_{kk} P_k^2$. Lucrul mecanic total înmagazinat în grindă este deci

$$L = \frac{1}{2} \delta_{ii} P_i^2 + \delta_{ik} P_k P_i + \frac{1}{2} \delta_{kk} P_k^2$$

Putem însă, repetând acelaş raţionament, să încărcăm grinda întâi cu P_k şi pe urmă cu P_i şi găsim

$$L = \frac{1}{2} \delta_{kk} P_k^2 + \delta_{ki} P_i P_k + \frac{1}{2} \delta_{ii} P_i^2$$

Comparând aceste două expresii deducem

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}$$

ceeace constitue teorema lui Maxwell sau teorema reciprocităţii săgeţilor, care se enunţă astfel: *săgeata produsă în i de o forţă ce lucrează în k este egală cu săgeata produsă în k de forţa ce lucrează în i.*

Ne folosim de această teoremă pentru a scrie mai uşor săgeata, atunci când putem muta forţa în alt punct.

146. Generalizarea legii lui Hooke. Toate demonstraţiile şi formulele stabilite până acum au avut la bază legea lui Hooke că deformaţiile sunt proporţionale cu rezistenţele ce le produc. In general aplicând această regulă am ajuns la rezultatul că deplasările erau proporţionale cu sarcinile care le produceau.

Să reluăm exemplul unei grinzi rezemată pe două reazeme şi încărcată cu mai multe sarcini $P_1, P_2 \ldots P_n$. Sub acţiunea

acestor sarcini punctele se vor lăsa şi vom obţine săgeţile $y_1, y_2 \ldots y_n$, iar lucrul mecanic de deformaţie este

$$L = \frac{1}{2} \Sigma P_n y_n$$

La lăsarea unui punct contribuesc toate sarcinile ceea ce se exprimă cu ajutorul coeficienţilor de influenţă scriind

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{1n} P_n \\ y_2 &= \delta_{21} P_1 + \delta_{22} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{2n} P_n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \delta_{n1} P_1 + \delta_{n2} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{nn} P_n \end{aligned}$$

Să presupunem că o sarcină P_i creşte cu $d P_i$ în acest caz lucrul mecanic va creşte şi el şi vom avea

$$d L = \Sigma P d y + \frac{1}{2} d P_i \, d y_i$$

în care putem neglija termenul al doilea fiind de ordin superior.

Creşterile săgeţilor se deduc prin derivarea acestora şi aşa putem scrie

$$\begin{aligned} d L = {} & P_1 (\delta_{11} d P_1 + \delta_{12} d P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{1n} d P_n) \\ & + P_2 (\delta_{21} d P_2 + \delta_{22} d P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{2n} d P_n) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + P_n (\delta_{n1} d P_1 + \delta_{n2} d P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{nn} d P_n) \end{aligned}$$

întrucât săgeata în un punct fiind datorită tuturor sarcinilor variază cu toate sarcinile.

Expresia aceasta se mai poate scrie grupând altfel termenii

$$\begin{aligned} d L = {} & d P_1 (\delta_{11} P_1 + \delta_{21} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{n1} P_n) \\ & + d P_2 (\delta_{12} P_1 + \delta_{22} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{n2} P_n) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + d P_n (\delta_{1n} P_1 + \delta_{2n} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{nn} P_n) \end{aligned}$$

Dacă privim pe L ca o funcţie de diferite sarcini $P_1, P_2 \ldots P_n$, atunci parantezele nu reprezintă de cât derivatele parţiale ale lui L în raport cu diferitele variabile adică

$$\begin{aligned} \frac{d L}{d P_1} &= \delta_{11} P_1 + \delta_{21} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{n1} P_n \\ \frac{d L}{d P_2} &= \delta_{12} P_1 + \delta_{22} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{n2} P_{n2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă acum derivăm a doua oară prima relaţie în raport cu P_2 iar a doua în raport cu P_1 vom găsi

$$\frac{d^2 L}{d P_1 d P_2} = \delta_{21}$$

$$\frac{d^2 L}{d P_2 d P_1} = \delta_{12}$$

de unde, după cum ştim din analiză derivata de ordinul al doilea fiind aceiaşi, deducem

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

adică tocmai teorema lui Maxwell.

Dacă înlocuim acest rezultat în ecuaţiile derivatelor parţiale avem

$$\frac{d L}{d P_1} = \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{1n} P_n = y_1$$

$$\frac{d L}{d P_2} = \delta_{21} P_1 + \delta_{22} P_2 + \ldots\ldots\ldots + \delta_{2n} P_n = y_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

adică tocmai prima teoremă a lui Castigliano. Iar dacă facem această derivată pentru unul din reazeme adică $y = 0$ avem teorema a doua a lui Castigliano.

Vedem deci că aceste teoreme nu sunt decât consecinţa legei de proporţionalitate pe care am pus'o la început, precum şi a principiului suprapunerii efectelor care ne-a permis să adunăm efectele feluritelor sarcini aplicate grinzii. Cu drept cuvânt deci putem considera aceasta ca o generalizare a legei lui Hooke, pusă la baza studiului nostru.

Putem aminti că în cazul flambajului de exemplu, unde era echilibru nestabil, săgeţile nu mai erau proporţionale cu sarcina, ci pentru anumite valori critice deveneau infinite. De asemenea la flambaj cu încovoiere am văzut că rezultatele nu se adunau.

147. **Stabilirea formulelor generale.** Dacă notăm cu X_1, X_2, ... mărimile static nedeterminate, atunci sistemul devine static determinat, supus la sarcinile cunoscute şi la forţele nedeterminate prin statică. Reacţiunile, forţele axiale, momentele încovoietoare, forţele tăietoare, momentele de răsucire, etc., depind de mărimile static nedeterminate şi putem scrie

$$A = A_0 + A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots$$

$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + \ldots$$

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $A_o, N_o, M_o, \ldots$ sunt reacţiunile, forţele axiale, momentele încovoietoare, etc., ce iau naştere în sistemul static determinat sub acţiunea sarcinilor cunoscute, iar $A_1, N_1, M_1, \ldots$ aceleaşi elemente care iau naştere când sistemul static determinat este încărcat numai cu o singură sarcină $X_1 = 1$, toate celelalte fiind nule; de asemenea $A_2, N_2, M_2, \ldots$ aceleaşi elemente care iau naştere când sistemul static determinat este încărcat numai cu o singură sarcină $X_2 = 1$, etc.

Ecuaţia generală a lui Castigliano

$$\int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dX}dx + \int \frac{N}{E\Omega}\frac{dN}{dX}dx + \ldots = 0$$

ne va da, observând că avem

$$\frac{dM}{dX_1} = M_1, \quad \frac{dN}{dX_1} = N_1, \ldots$$

şi înlocuind în ecuaţia de sus

$$0 = \int \frac{M_o M_1}{EI}dx + \int \frac{N_o N_1}{E\Omega}dx + \ldots$$
$$+ X_1\left(\int \frac{N_1^2}{EI}dx + \int \frac{N_1^2}{E\Omega}dx + \ldots\right)$$
$$+ X_2\left(\int \frac{M_1 M_2}{EI}dx + \int \frac{N_1 N_2}{E\Omega}dx + \ldots\right)$$
$$+ \ldots$$

obţinând atâtea ecuaţii câte necunoscute avem şi din care putem afla aceste necunoscute.

Putem să folosim şi ecuaţia generală a lucrului virtual

$$\int \frac{M\overline{M}}{EI}dx + \int \frac{N\overline{N}}{E\Omega}dx + \ldots + \int \alpha t_o \overline{N}\,dx = 0$$

în acelaşi mod luând ca sarcină virtuală tocmai $\overline{X} = 1$. In acest caz toate sarcinile fiind nule, afară de X_1, vom avea

$$\overline{M} = M_1, \quad \overline{N} = N_1, \ldots$$

şi deci putem complecta ecuaţia luând şi deplasarea reazemului unde lucrează X_1, care să fie cunoscută δ_1, aşa în cât

$$\delta_1 = \int \frac{M_o M_1}{EI}dx + \int \frac{N_o N_1}{E\Omega}dx + \ldots$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+ X_1 \left(\int \frac{M_1^2}{E I} dx + \int \frac{N_1^2}{E \Omega} dx + \dots \right)$$

$$+ X_2 \left(\int \frac{M_1 M_2}{E I} dx + \int \frac{N_1 N_2}{E \Omega} dx + \dots \right.$$

$$+ \dots\dots$$

$$+ \int N_1 \alpha t_0 \, dx + \dots$$

obţinând deci aceleaşi valori.

Termenii care apar în aceste expresii sunt deformaţii şi se pot pune în evidenţă cu uşurinţă. Dacă luăm sistemul de bază static nedeterminat, încărcat cu sarcina $X_1 = 1$, şi urmărim deformaţia produsă în punctul 2, în direcţia forţei X_2, atunci vom putea scrie această săgeată cu ajutorul teoremei lui Castigliano şi avem

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1 M_2}{E I} dx + \int \frac{N_1 N_2}{E \Omega} dx + \dots$$

de oare ce încărcările produse de către X_1 sunt M_1, N_1, ... iar derivatele în raport cu X_2 sunt M_2, N_2, ...

In ceea ce priveşte temperatura putem scrie în acelaşi mod

$$\delta_{1t} = \int M_1 \alpha \Delta t \frac{dx}{h} + \int N_1 \alpha t_0 \, dx$$

şi se ia mai totdeauna în aplicaţii numai termenul corespunzător forţei normale.

Dacă luăm în considerare sistemul static determinat sub încărcările M_0, N_0, ... atunci putem în acelaşi mod să scrim

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 M_1}{E I} dx + \int \frac{N_0 N_1}{E I} dx + \dots$$

δ_{10} fiind săgeata în punctul 1 datorită sarcinii date ce lucrează pe grindă.

Dacă sistemul nostru are şi bare articulate, atunci acestea vor fi supuse numai la eforturi axiale, tensiune sau compresiune, eforturi care sunt constante în fiecare bară. Numai avem deci integrale ci o sumă de termeni de forma

$$\Sigma \frac{N l}{E \Omega} \frac{d N}{d X}, \quad \Sigma \frac{N_0 N_1}{E \Omega} l, \quad \Sigma \frac{N_1^2}{E \Omega} l$$

care se adaugă în expresiile de mai sus.

In acest fel ecuaţiile de deformaţie se pot scrie

$$0 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \ldots + \delta_{1t}$$
$$0 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \ldots + \delta_{2t}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

în cazul reazemelor rigide. Când reazemele se deformează se ţine seamă de lucrul mecanic de deformaţie ce le revine, închipuind reazemul din bare şi înglobând aceste bare în sistemul nostru.

Exemplu. Pentru cazul sistemului simplu static nedeterminat când avem o singură necunoscută X_1 o putem scrie imediat

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

şi putem oricând să calculăm săgeţile.

Astfel pentru grinda înţepenită la un capăt şi rezemată la celalt, încărcată cu o sarcină uniform distribuită p, vom suprima reazemul înlocuindu-l cu reacţiunea necunoscută X_1.

Săgeata acestui punct, sub sarcina uniform distribuită p este cunoscută, deci

$$\delta_{10} = \frac{p\,l^4}{8\,E\,I}$$

In punctul acesta aşezăm sarcina X_1, care ne dă o săgeată cunoscută

$$\delta_{11} = -\frac{l^3}{3\,E\,I}$$

şi deci răspunsul este

$$X_1 = \frac{3\,p\,l}{8}$$

§ 2. Sisteme de grinzi.

148. Grinda atârnată. Sistemul se compune dintr'o grindă rezemată pe două reazeme la care, din cauza deschiderii mari, ajutăm printr'un reazem intermediar atârnat cu două proptele, care transmit această sarcină iarăşi la reazeme. Cele două proptele şi popul sunt articulate. Coarda de jos este o grindă continuă rezemată pe cele două reazeme şi atârnată de pop. Sarcinile sunt aşezate pe grinda de jos (fig. 226).

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul este static nedeterminat şi vom alege ca necunoscută X împingerea orizontală produsă de sistemul articulat care dă o tensiune în coarda de jos.

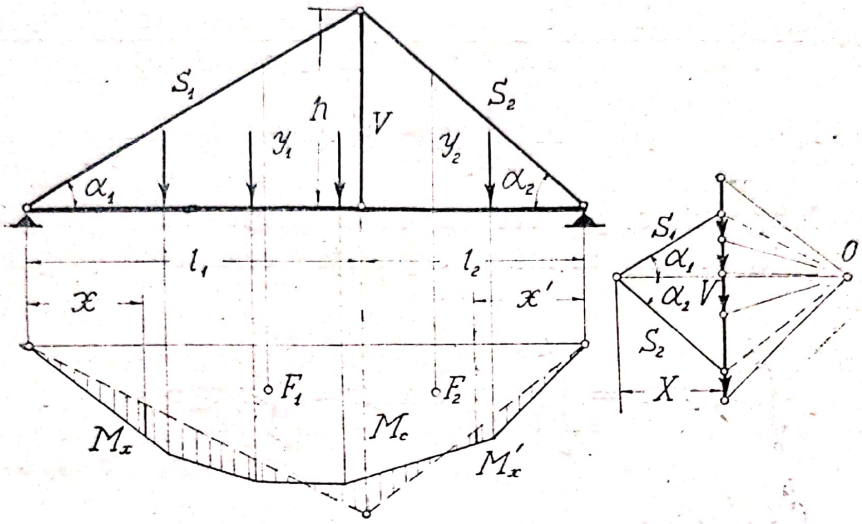


Fig. 226

Eforturile în bare sunt deci

$$S_1 = \frac{X}{\cos \alpha_1}, \qquad \frac{d S_1}{d X} = \frac{1}{\cos \alpha_1}$$

$$S_2 = \frac{X}{\cos \alpha_2}, \qquad \frac{d S_2}{d X} = \frac{1}{\cos \alpha_2}$$

$$V = X(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2), \qquad \frac{d V}{d X} = \operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2$$

relaţii care se văd şi în poligonul forţelor din figură. Aceste eforturi ne dau reacţiunile pe reazeme care se pot scrie

$$A = A_0 - X \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$B = B_0 - X \operatorname{tg} \alpha_2$$

şi deci

$$M_x = M_0 - X \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot x = M_0 - X y, \qquad \frac{d M}{d X} = -y$$

$$M'_x = M'_0 - X \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot x' = M'_0 - X y', \qquad \frac{d M'}{d X} = -y'$$

aşa în cât ecuaţia lui Castigliano devine

$$-\int_0^{l_1}\frac{1}{EI}(M_0 - Xy)\,y\,dy - \frac{1}{EI}\int_0^{l_2}(M'_0 - Xy')\,y'\,dx' +$$

$$+\frac{1}{E\Omega_1}\frac{X}{\cos\alpha_1}\frac{1}{\cos\alpha_1}\frac{l_1}{\cos\alpha_1} + \frac{1}{E\Omega_2}\frac{X}{\cos\alpha_2}\frac{1}{\cos\alpha_2}\frac{l_2}{\cos\alpha_2}$$

$$+\frac{l}{E\Omega_3}X(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)^2 h + \frac{l}{E\Omega}Xl = 0$$

Integralele se pot deduce din diagrama momentelor grinzii cunoscute, ele reprezentând suprafeţele celor două porţiuni de grindă

$$\int_0^{l_1} M_0\,y\,dx = \int_0^{l_1} M_0 \operatorname{tg}\alpha_1\,x\,dx = F_1\,x_1 \operatorname{tg}\alpha_1 = F_1\,y_1$$

$$\int_0^{l_2} M'_0\,y'\,dx' = \int_0^{l_2} M'_0 \operatorname{tg}\alpha_2\,x'\,dx' = F_2\,x' \operatorname{tg}\alpha_2 = F_2\,y_2$$

pe când

$$\int_0^{l_1} y^2\,dx = 2\int_0^{l_1}\frac{y}{2}\,y\,dx = 2\,\frac{l_1}{2}\,\frac{h}{3}$$

$$\int_0^{l_2} y'^2\,dx' = 2\int_0^{l_2}\frac{y'}{2}\,y'\,dx = 2\,\frac{l_2}{2}\,\frac{h}{3}$$

aşa în cât soluţia este

$$X = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{\frac{I}{\Omega_1}\frac{l_1}{\cos^3\alpha_1} + \frac{I}{\Omega_2}\frac{l_2}{\cos^3\alpha_2} + \frac{I}{\Omega_3}(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)^2 h + \frac{I}{\Omega}l + \frac{h_2 l}{3}}$$

Cunoscând pe X, putem cunoaşte momentele încovoietoare în orice secţie, avem deci diagrama momentelor şi putem calcula construcţia. Este de observat că în expresia necunoscutei X intră dimensiile construcţiei, care deci trebuesc luate într'o primă aproximaţie.

Momentul produs de X scade momentul încovoietor M_0 produs de sarcina dată şi obţinem astfel diagrama momentului

ncovoietor rezultant, după cum se vede în figură. Valoarea momentului $M_c = Xl_1 = Xl_2$ atârnă de dimensiile luate şi putem deci să-i hotărâm mărimea. Momentele încovoietoare în coarda de jos sunt astfel mult micşorate şi putem cu o secţie convenabilă să acoperim o deschidere mare şi să suportăm sarcini mari.

Grinda se poate construi şi proptită, sau atârnată şi proptită, în care caz formulele sunt aceleaşi, luând în considerare termenii corespunzători barelor ce compun sistemul.

149. **Grinda armată.** O grindă este întărită cu doi popi şi cu un fir, obţinând o grindă armată. Încărcarea e uniform distribuită, grinda este rezemată pe două reazeme, deci static determinată. Totuşi ea e static nedeterminată în interior căci pentru a o calcula va trebui să determinăm tensiunile în cele trei bare, şi compresiunea în cei doi popi. Pe lângă acestea momentele încovoietoare în grindă şi compresiunea axială în ea.

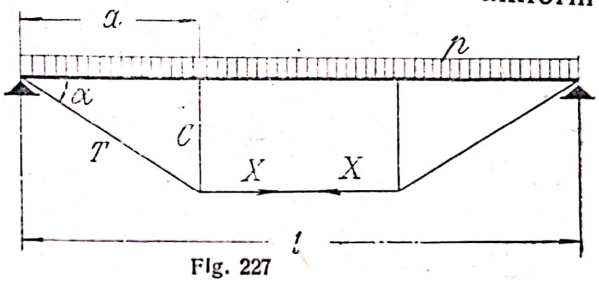


Fig. 227

Presupunem simetrie şi alegem ca necunoscută tensiunea în bara de jos pe care o notăm cu X.

Atunci vom avea

$$A = B = \frac{pl}{2}$$

$$T\cos\alpha = X$$

$$C = T\sin\alpha = X\operatorname{tg}\alpha$$

$$M = M_0 - Xy \quad , \quad N = X$$

în care M_0 este momentul din sistemul static determinat, adică grinda pe două reazeme.

Necunoscuta X o aflăm cu ajutorul teoremei lui Castigliano. Dacă Ω_1 este secţia firului intins, Ω_2 secţia populului, Ω secţia grinzii avem

$$\frac{dL}{dX} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{dM}{dX}dx + \int_0^l \frac{N}{E\Omega}\frac{dN}{dX}dx + 2\int^{\frac{a}{\cos\alpha}} \frac{T}{E_1\Omega_1}\frac{dT}{dX}dx +$$

$$+2\int_0^h \frac{C}{E_2\Omega_2}\frac{dC}{dX}dy+\int_0^{l-2a}\frac{X}{E_1\Omega_1}dx=0$$

ceea ce ne dă

$$\frac{1}{EI}\int_0^l (M_0-Xy)(-y)\,dx+\frac{1}{EI}\int_0^l X\,dx+2\int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}}\frac{X}{E_1\Omega_1\cos\alpha}\frac{dx}{\cos\alpha}$$

$$+2\int_0^h \frac{X\operatorname{tg}\alpha}{E_2\Omega_2}\operatorname{tg}\alpha\,dy+\int_0^{l-2}\frac{X}{E_1\Omega_1}dx=0$$

de unde integrând scoatem pe X

$$X=\frac{\frac{1}{EI}\int_0^l M_0\,y\,dx}{\frac{1}{EI}\int_0^l y^2\,dx+\frac{l}{E\Omega}+\frac{2a}{E_1\Omega_1\cos^3\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha\,h}{E_2\Omega_2}+\frac{l-2a}{E_1\Omega_1}}$$

integralele ce au mai rămas în această formulă se evaluează astfel. Integrala dela numărător reprezintă un moment static. In porţiunea a, avem $y=\frac{h}{a}x$, în porţiunea din mijloc $y=h$, deci

$$\int_0^l M_0\,y\,dx=2\int_0^a M_0\frac{h}{a}x\,dx+\int_a^{l-2a} M_0\,h\,dx$$

prima este momentul static al suprafeţei parabolei tăiată de a faţă cu verticala reazemului din stânga a doua este suprafaţa parabolei din mijloc

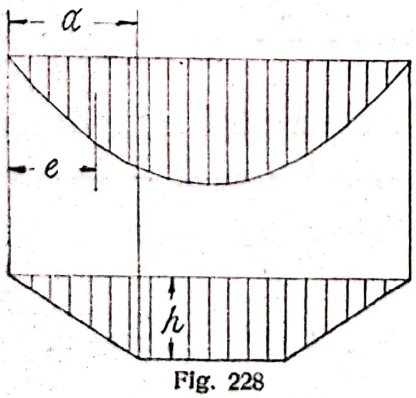


Fig. 228

$$\int M_1\,y\,dx=2\,Fe\frac{h}{a}+F'h$$

In ceea ce priveşte integrala doua, ea este chiar momentul static al suprafeţei trapezului faţă cu baza, ceea ce se poate scrie, şi anume

$$\int_0^l y^2\,dx = Fd = \frac{l+l-2a}{2}\,h\,\frac{h}{3}\,\frac{l+2(l-2a)}{l+l-2a} = \frac{h^2(3l-4a)}{6}$$

150. **Pod suspendat.** Se poate întrebuinţa pentru deschideri mari, o grindă rezemată pe două reazeme şi atârnată cu nişte tiranţi, susţinuţi de un cablu fixat în două puncte. Avem atunci un pod suspendat (fig. 229).

Luând grinda încărcată cu greutatea ei proprie, sarcina căii uniform distribuită, atunci cablul va lua forma unui poligon

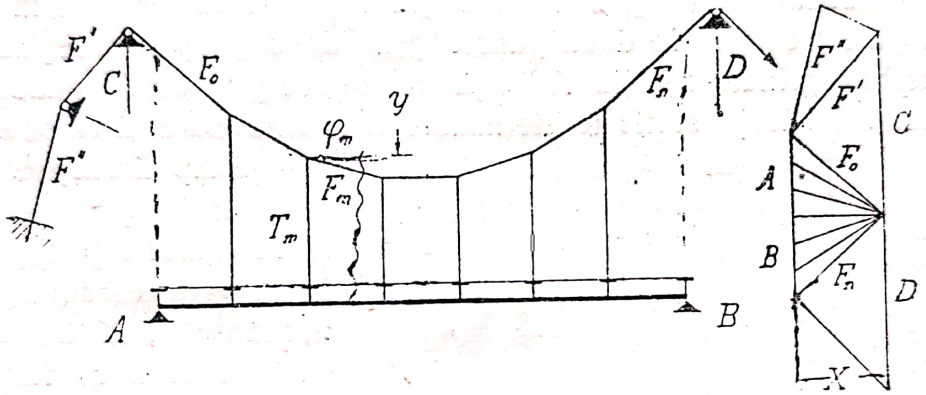


Fig. 229

funicular sub acţiunea forţelor ce lucrează în tiranţi. Se aranjează construcţia totdeauna aşa fel ca sub această sarcină grinda să fie orizontală şi toţi tiranţii supuşi la întindere.

Pentru un convoi de sarcini care ar lucra pe grindă, aceasta se va deforma şi va atrage şi cablul.

Forţele care lucrează în cablu sunt forţele din poligonul funicular, care fac echilibru tensiunilor din tiranţi. Ele atârnă de tensiunea orizontală în cablu, pe care o alegem ca necunoscută static nedeterminată X. Cunoscând pe X cunoaştem toate tensiunile în cablu, tensiunile în tiranţi şi deci şi forţele ce lucrează asupra grinzii, după cum se vede în poligonul forţelor din figură.

Vom avea astfel

$$F_m = \frac{X}{\cos\varphi_m}$$

$$T_m = X(\operatorname{tg}\varphi_m - \operatorname{tg}\varphi_{m+1})$$

Momentul încovoietor într'o secţie în grindă îl scrim luând momentul forţelor din stânga secţiei. Momentul tuturor forţelor

date de tiranţii ce se află în stânga secţiei îl putem înlocui prin momentul rezultantei din stânga, care este F_o. Ducând verticala reazemului A, care taie cablul în 0, vom avea în acest punct reacţiunea verticală şi cea orizontală care este X. Vom scrie deci

$$M_x = M_o - X y$$

Ecuaţia lui Castigliano va fi deci

$$-\frac{1}{E I}\int (M_o - X y)\, y\, d x + \Sigma \frac{N l}{E \Omega}\frac{d N}{d X} = 0$$

151. **Grinda proptită.** O grindă de deschidere mai mare, o putem sprijini în două puncte prin două proptele, obţinând astfel o grindă proptită. Adăogând cele două proptele am adăogat două noi forţe, static nedeterminate, care urmează a fi calculate.

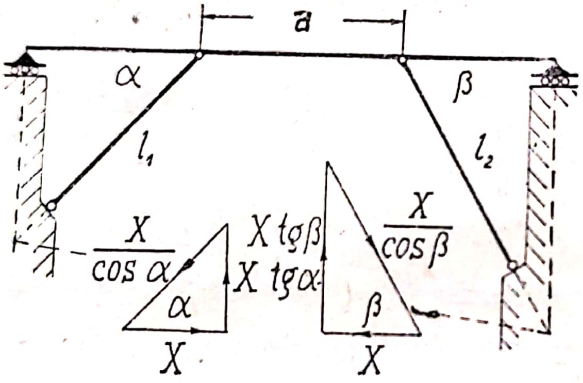


Fig. 230

Simplificăm problema, luând cele două reazeme mobile şi alegând împingerea orizontală ca necunoscută X, în care caz echilibrul la forţele orizontale este satisfăcut şi vom urmări forţele verticale (fig. 230).

In felul acesta vom avea în grinda orizontală momente încovoietoare pe care le putem scrie

$$M = M_o - M_1 X$$

în care M_o este momentul cunoscut în grinda static determinată sub sarcinile date, iar M_1 este momentul produs în aceiaşi secţie de reacţiunile produse în proptele, prin forţa X static nedeterminată.

In proptele vom avea compresiuni, ca şi în grinda orizontală, în porţiunea din mijloc.

Condiţia de minim a lucrului mecanic ne va da

$$-\frac{1}{E I}\int (M_o - M_1 X)\, M_1\, d x + \frac{1}{E \Omega_1}\frac{X}{\cos\alpha}\frac{l_1}{\cos\alpha} + \frac{1}{E \Omega_2}\frac{X}{\cos\beta}\frac{l_2}{\cos\beta} + \frac{1}{E \Omega} X a = 0$$

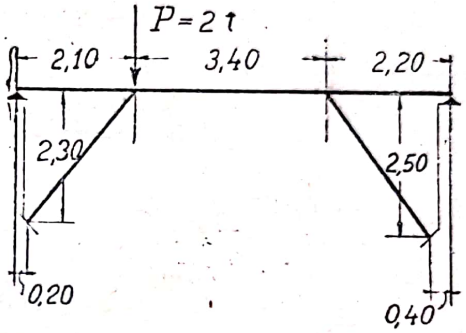
de unde vom scoate

$$X = \frac{\frac{1}{EI}\int M_o M_1 \, dx}{\frac{1}{EI}\int M_1^2 \, dx + \frac{l_1}{E\Omega_1 \cos^2 \alpha} + \frac{l_2}{E\Omega_2 \cos^2 \beta} + \frac{a}{E\Omega}}$$

în care cunoaştem însemnarea integralelor şi modul de a le calcula.

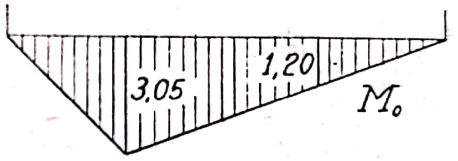
Exemplu. Să calculăm grinda proptită cu dimensiile din figură, încărcată cu o sarcină $P = 2$ t (fig. 231).

Curbele momentelor încovoietoare M_o şi M_1 sunt date pe figură, unde s'a calculat M_o pentru sarcina dată $P = 2$ t, iar M_1 pentru sarcina $X = 1$, când cele 2 forţe verticale în dreptul proptelelor devin tg α şi tg β.



$$M = \frac{P\,a\,b}{l} = \frac{2 \times 2{,}1 \times 5{,}6}{7{,}7} = 3{,}05 \text{ tm}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{2{,}30}{1{,}90} = 1{,}21, \quad \text{tg } \beta = \frac{2{,}50}{1{,}80} = 2{,}39$$



Pentru aceste forţe calculăm momentele şi avem

$$A = \frac{1{,}21 \times 5{,}6 + 1{,}39 \times 2{,}2}{7{,}7} = 1{,}28$$

$$B = \frac{1{,}21 \times 2{,}1 + 1{,}39 \times 5{,}5}{7{,}7} = 1{,}32$$

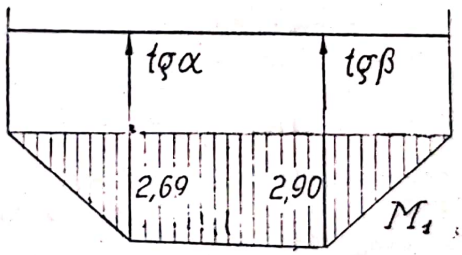


Fig. 231

deci momentele sunt

$M_1 = 1{,}28 \times 2{,}1 = 2{,}69$ m

$M_2 = 1{,}32 \times 2{,}2 = 2{,}90$ m

Cu aceste date vom calcula

$$\int M_o M_1 \, dx = \frac{2{,}10 \times 3{,}05}{2} \frac{2}{3} 2{,}10 \frac{2{,}69}{2{,}10}$$

$$+ \frac{3{,}05 + 1{,}20}{2} 3{,}40 \left(2{,}69 + \frac{2{,}40}{3} \frac{1{,}20 + 2 \times 3{,}05}{3{,}05 + 1{,}20} \frac{0{,}21}{3{,}40}\right)$$

$$+ \frac{1{,}20 \times 2{,}20}{2} \frac{2}{3} 2{,}20 \frac{2{,}90}{2{,}20} = 28{,}60 \text{ tm}^3$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{2}\int M^2_1\,dx = \frac{2{,}69\times 2{,}10}{2}\,\frac{2{,}69}{3} + \frac{2{,}69\times 3{,}40}{2}\,\frac{2{,}69}{3}$$

$$+\frac{2{,}90\times 3{,}40}{2}\left(\frac{2{,}90}{3}+\frac{2{,}69}{3}\right)+\frac{2{,}90\times 2{,}20}{2}\,\frac{2{,}90}{3}=18{,}90\ \text{m}^3$$

Putem lua într'o primă aproximaţie

$$X=\frac{\int M_o\,M_1\,dx}{\int M^2_1\,dx}=\frac{28{,}60}{2\times 18{,}90}=0{,}756\ \text{t}$$

ceea ce ne duce la momentele în grindă

$$M = 3{,}05 - 2{,}69\times 0{,}756 = +1{,}02\ \text{tm}$$

$$= 1{,}20 - 2{,}90\times 0{,}756 = -0{,}93\ \text{tm}$$

şi atunci putem dimensiona

$$W_{nec}=\frac{102000}{80}=1280\ \text{cm}^3$$

alegem 16/22 pentru grindă şi 16/16 pentru proptele.

Vom avea atunci calculând toţi termenii

$$\frac{I}{\Omega_1}=\frac{I}{\Omega_2}=\frac{7509}{256}=29{,}33\ \text{cm}^2,\qquad \frac{I}{\Omega}=\frac{7509}{352}=21{,}33\ \text{cm}^2$$

şi înlocuind obţinem necunoscuta

$$X=\frac{28{,}60}{2\times 18{,}90+0{,}00293\left(\frac{2{,}984}{0{,}404}+\frac{3{,}080}{0{,}340}\right)+3{,}40\times 0{,}00213}=0{,}755\ \text{t}$$

aşa în cât momentele în grindă vor fi

$$M = 3{,}05 - 2{,}69\times 0{,}755 = +1{,}02\ \text{tm}$$

$$= 1{,}20 - 2{,}90\times 0{,}755 = -0{,}99\ \text{tm}$$

iar compresiunile în proptele vor fi

$$\frac{X}{\cos\alpha}=\frac{0{,}755}{0{,}636}=1{,}188\ \text{t}$$

$$\frac{X}{\cos\beta}=\frac{0{,}755}{0{,}583}=1{,}296\ \text{t}$$

la care flambajul este asigurat.

§ 3. Cadre.

152. **Cadru cu două articulaţii.** Dacă avem un cadru format din bare legate între ele prin noduri rigide, şi articulat la cele două capete, (fig. 232) vom avea în fiecare reazem câte

două reacţiuni. Deci în total patru necunoscute şi rezultă una din ele static nedeterminată. Cel mai nemerit este să alegem componenta orizontală a reacţiunii dintr'un reazem ca necunoscută static nedeterminată şi atunci toate reacţiunile sunt cunoscute.

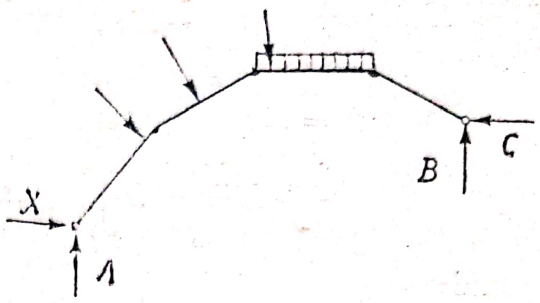


Fig. 232

Vom putea deci să scrim pentru orice secţie

$$M = M_o - M_1 X$$
$$N = N_o - N_1 X$$

în care M_o şi N_o sunt datorite sarcinilor în sistemul static determinat, iar M_1, N_1 sunt datorite sarcinii $X = 1$, în acelaş sistem.

Atunci ecuaţia lui Castigliano ne va da

$$\frac{1}{EI}\int (M_o - M_1 X)\, M_1\, dx + \frac{1}{E\Omega}\int (N_o - N_1 X)\, N_2\, dx = 0$$

de unde scoatem necunoscuta

$$X = \frac{\frac{1}{EI}\int M_o M_1\, dx + \frac{1}{E\Omega}\int N_o N_1\, dx}{\frac{1}{EI}\int M^2_1\, dx + \frac{1}{E\Omega}\int N^2_1\, dx}$$

a). Cadru simetric, sarcină verticală. Să luăm un cadru format din doi stâlpi de egală înălţime h şi o grindă orizontală de deschidere l. Incărcarea o luăm oarecare pe grinda orizontală (fig. 233). Vom avea atunci împingerea orizontală ca necunoscută static nedeterminată X, iar reacţiunile verticale sunt A,B, cele cunoscute dela grinda simplu rezemată.

Vom avea atunci, în cele trei bare, momentele încovoietoare şi derivatele lor după următorul tablou

1	Xy	y
2	$M_o - Xh$	$-h$
3	Xy	y

aşa în cât, luând numai influenţa momentelor încovoietoare, vom scrie relaţia lui Castigliano sub forma

$$\frac{1}{E I_1}\int_0^h X y^2\,dy + \frac{1}{E I_2}\int_0^h X y^2\,dy + \frac{1}{E I_3}\int_0^l (M_0 - X h)(-h)\,dx = 0$$

Luând $I_1 = I_2$ şi integrând

$$\frac{2 I_3}{I_1} X \frac{h^3}{3} - h\int M_0\,dx + X h^2 l = 0$$

de unde

$$X = \frac{\int M_0\,dx}{h l + \frac{2}{3}\frac{I}{I_1} h^2}$$

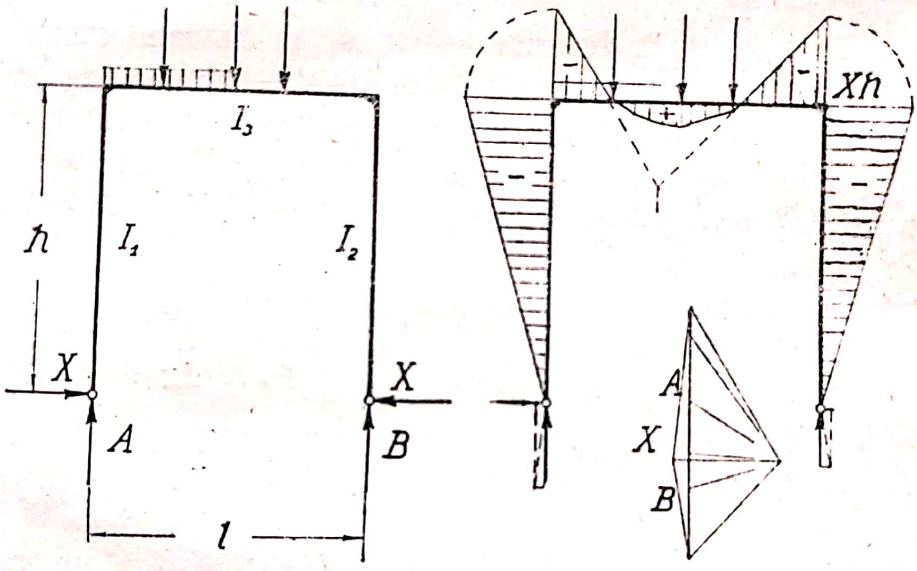


Fig. 232

In ceeace priveşte integrala dela numărător se vede că ea reprezintă suprafaţa diagramei momentelor pentru grinda rezemată. Deci pentru cazul unei sarcini uniform distribuite şi sarcini concentrate aceasta este

$$\int M_0\,dx = \frac{2}{3} l \frac{p l^2}{8} + \Sigma \frac{1}{2} l P a b$$

După ce am calculat reacţiunile putem desena diagrama momentelor încovoietoare, ceea ce se vede în figură.

b). Cadru simetric, sarcină orizontală. Să luăm acelaş cadru încărcat cu o sarcină orizontală H, la unul din stâlpi (fig. 234). Vom alege tot împingerea orizontală ca necunoscută

X, iar reacţiunile verticale le calculăm din condiţiile de echilibru.

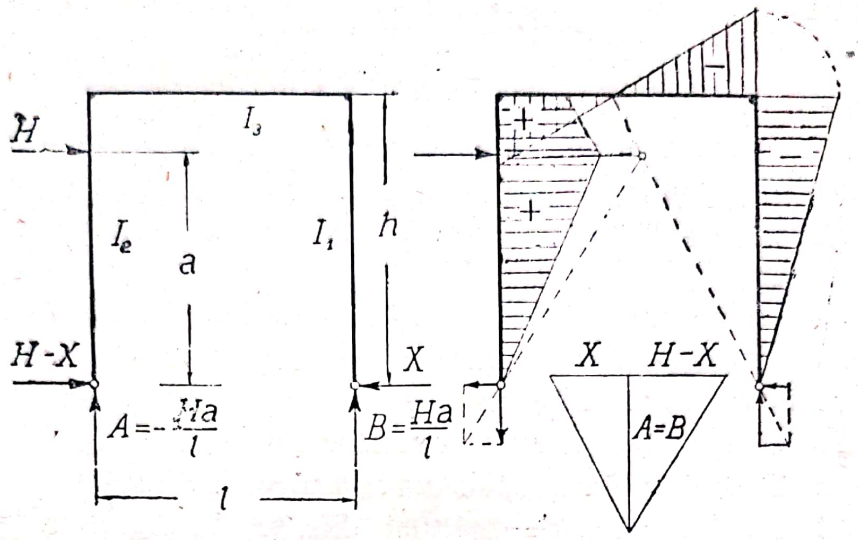


Fig. 234

Vom avea deci, în cele trei bare, momentele încovoietoare şi derivatele lor după următorul tablou

1	Xy	y
2	$(H-X)y$	$-y$
2′	$(H-X)y-H(y-a)$	$-y$
3	$\frac{Ha}{l}x-Xh$	$-h$

aşa în cât luând numai influenţa momentelor încovoietoare, vom scri relaţia lui Castigliano sub forma

$$\frac{1}{EI_1}\int_0^h Xy^2\,dy-\frac{1}{EI_2}\int_0^a (H-X)y^2\,dy-$$

$$-\frac{1}{EI_2}\int_a^h\left[(H-X)y-H(y-a)\right]y\,dy$$

$$-\frac{1}{EI_3}\int_0^l\left(\frac{Ha}{l}x-Xh\right)h\,dx=0$$

Luând $I_1=I_2$ şi integrând, aflăm

$$X = \frac{\frac{I_3}{I_1}\left(h^2 - \frac{a^2}{2}\right) + h\,l}{2\,\frac{I_3}{I_1}\frac{h}{3} + l}\,\frac{H\,a}{2\,h^2}$$

Se vede că numitorul este acelaş ca şi în cazul precedent, numărătorul fiind schimbat din cauza sarcinii.

Când $a = h$, adică sarcina în unul din colţuri rezultă $X = H/2$.

După ce am calculat reacţiunile putem desena diagrama momentelor încovoietoare, care se vede în figură. Cele trei forţe în echilibru trebue să fie concurente, iar reacţiunea din B ne dă şi punctul unde momentul încovoietor este nul.

c). Cadru nesimetric, sarcină verticală. Să luăm un cadru format din doi stâlpi de înălţimi diferite h_1, h_2, şi o grindă

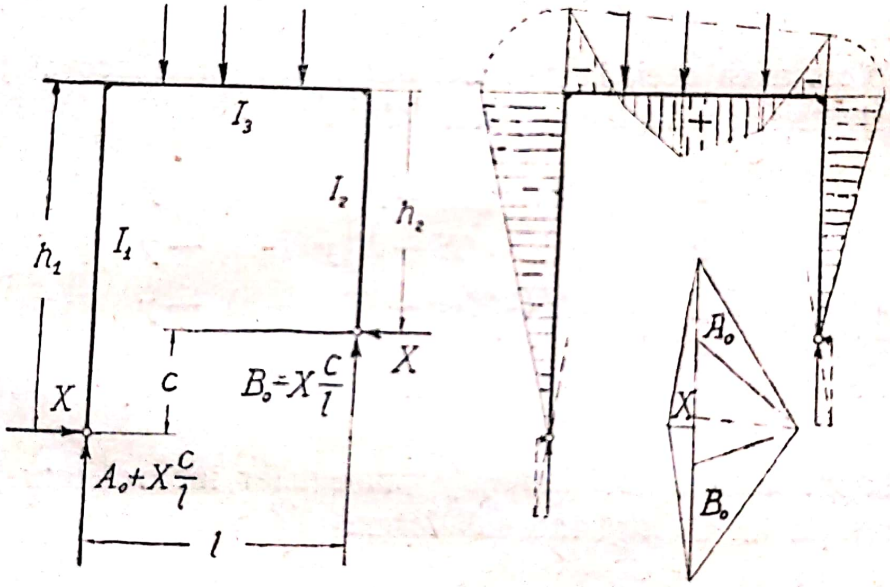


Fig. 235

orizontală de deschidere l (fig. 235). Incărcarea o luăm oarecare pe grinda orizontală. Vom lua tot împingerea orizontală ca necunoscută static nedeterminată X, iar reacţiunile verticale le calculăm din condiţiile de echilibru.

Vom avea deci, în cele trei bare, momentele încovoietoare şi derivatele lor după următorul tablou

1	Xy	y
3	$M_0 + X\frac{c}{l}x - X h_1$	$\frac{c}{l}x - h_1$
2	Xy	y

aşa în cât, luând numai influenţa momentelor încovoietoare, vom scrie relaţia lui Castigliano sub forma

$$\frac{1}{EI_1}\int_0^{h_1} X y^2\,dy + \frac{1}{EI_2}\int_0^{h_2} X y^2\,dy +$$

$$+\frac{1}{EI_3}\int_0^{l}\left(M_0 + X\frac{c}{l}x - X h_1\right)\left(\frac{c}{l}x - h_1\right)dx = 0$$

şi integrând

$$\frac{I_3}{I_1}X\frac{h_1^3}{3} + \frac{I_3}{I_2}X\frac{h_2^3}{3} + \frac{c}{l}\int M_0\,x\,dx - h_1\int M_0\,dx$$

$$+ X\frac{c^2}{l^2}\frac{l^3}{3} - X h_1\frac{c}{l}\frac{l^2}{2} - X\frac{c}{l}h_1\frac{l^2}{2} + X h_1^2 l = 0$$

de unde

$$X = \frac{h_1\int M_0\,dx - \frac{c}{l}\int M_0\,x\,dx}{\frac{I_3}{I_1}\frac{h_1^3}{3} + \frac{I_3}{I_2}\frac{h_2^3}{3} + \frac{c^2 l}{3} - h_1 c\frac{l}{2} + h_1^2 l}$$

In ceea ce priveşte integralele de la numărător, una reprezintă cum am văzut suprafaţa diagramei momentelor pentru grinda rezemată iar alta momentul acestei suprafeţe faţă de unul din reazeme, şi suntem în măsură să le putem exprima oricând.

Odată aflată necunoscuta X, putem avea momentele încovoietoare în orice secţie şi avem diagrama alăturată.

d). Cadru nesimetric, supus la temperatură. Să luăm cadrul din exemplul precedent, supus la o temperatură t, care produce dilatări. Reazemele fiind fixe se vor produce împingeri şi neavând nici o forţă, urmează că împingerile vor fi egale şi direct opuse, dirijate după dreapta $A\,B$ (fig. 236).

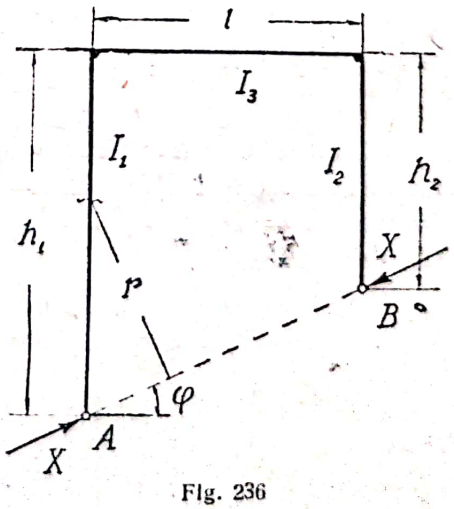


Fig. 236

Din cauza acestei reacţiuni, pe care o alegem ca necunoscută

X, se produc în barele cadrului momente încovoietoare, care pentru ori ce secţie sunt $M = X\,r$. Luând în considerare numai acţiunea momentelor încovoietoare vom neglija lucrul mecanic produs de forţele normale.

Dacă construcţia ar fi liberă, $X = 0$, atunci punctele A şi B se vor deplasa cu dilatarea produsă de temperatură.

$$\Delta AB = \alpha t.\ AB = \alpha t \frac{l}{\cos\varphi}$$

Aceiaşi deplasare o produce şi deformaţia dată de forţele X, care menţin distanţa între reazeme. Ori deplasarea în sensul forţei X este dată de teorema lui Castigliano

$$\Delta AB = \frac{dL}{dX} = \int \frac{M}{EI}\frac{dM}{dX}dx = X\int \frac{r^2\,dx}{EI}$$

rezultă deci

$$X = \frac{\alpha t\, l}{\cos\varphi \int \frac{r^2\,dx}{EI}}$$

Numitorul este momentul de inerţie al cadrului faţă cu dreapta AB şi se poate calcula uşor pentru cele trei bare.

$$r = y\cos\varphi, \qquad \frac{1}{EI_1}\frac{h_1^3}{3}\cos^2\varphi$$

$$r = y\cos\varphi, \qquad \frac{1}{EI_2}\frac{h_2^3}{3}\cos^2\varphi$$

$$r = h_1\cos\varphi - x\sin\varphi, \qquad \frac{l}{EI_3}\left(h_1^2\cos^2\varphi + h_1 l\sin\varphi\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\sin^2\varphi\right)$$

Exemplu. O conductă are diametrul $D = 267$ mm, grosime $s = 7$ mm, pentru aburi supra încălziţi la $t = 350^0$, şi are forma cadrului cu lungimile $h_1 = 9{,}5$m, $l = 4{,}6$ m, $h_2 = 4$ m. Să se afle împingerea.

Vom avea

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{9{,}5 - 4}{3{,}6} = 1{,}527, \qquad \begin{matrix}\sin\varphi = 0{,}836\\ \cos\varphi = 0{,}548\end{matrix}$$

Secţia conductei fiind constantă avem

$$\int \frac{r^2\,dx}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{h_1^2}{3}\cos^2\varphi + \frac{h_2^3}{3}\cos^2\varphi + l(h_1^2\cos^2\varphi + h_1 l\sin\varphi\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\sin^2\varphi\right)$$

$$= \frac{100^3}{2{,}1 \times 10^6 \times 4830} 256{,}88 = 1{,}53 \times 10^{-2}$$

şi deci

$$X = \frac{0{,}000011 \times 350 \times 360}{0{,}548 \times 1{,}53 \times 10^{-2}} = 165 \text{ kg}$$

Această împingere va produce momente încovoietoare, maximul fiind în punctul cel mai îndepărtat

$$M_{max} = X r = 165 \times 950 \times 0{,}548 = 85899 \text{ kg cm}$$

care va da rezistenţa în conductă

$$\sigma = \frac{M D}{2 I} = \frac{85899 \times 26{,}7}{2 \times 4830} = 236 \text{ kg/cm}^2$$

care se adaogă la rezistenţele produse de presiunea interioară.

153. **Cadru înţepenit.** Dacă avem un cadru format din bare legate între ele prin noduri rigide şi înţepenit la cele două capete, vom avea în fiecare reazem câte trei reacţiuni. Deci în total şase necunoscute şi cum avem numai trei ecuaţii de echilibru, rezultă trei necunoscute static nedeterminate. Putem alege reacţiunile reazemului din stânga ca necunoscute X, Y, Z, în care X, Y, sunt două forţe, iar Z un moment (fig. 237). Grinda devine astfel static determinată, înţepenită în reazemul din stânga şi încărcată cu sarcinile date şi cele static nedeterminate.

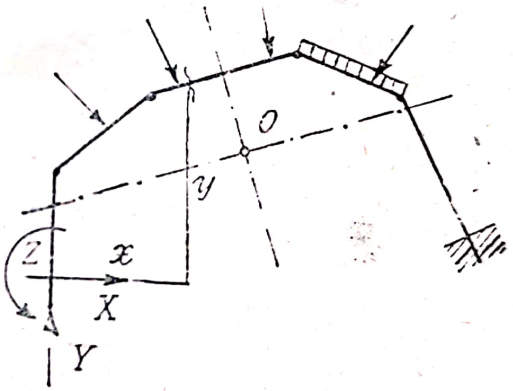


Fig. 237

Vom putea deci scrie pentru o secţie

$$M = M_o - X y - Y x - Z$$

în care M_o este momentul cunoscut în sistemul static determinat, grinda înţepenită la un capăt.

Scriind condiţia de minim a lui Castigliano vom găsi trei ecuaţii de forma

$$\int \frac{M}{E I} \frac{d M}{d X} d s = 0$$

care ne vor da pe cele trei necunoscute, şi în care am luat

elementul ds după axa diferitelor bare ce compun cadrul şi care au lungimi şi momente de inerţie diferite.

Pentru a aduce toţi termenii la aceiaşi formă vom înmulţi cu un moment de inerţie mediu I_m şi vom însemna elementul elastic

$$\frac{I_m}{I} ds = dw$$

şi desvoltând ecuaţiile de mai sus vom găsi

$$\int M_o y\, dw - X\int y^2 dw - Y\int xy\, dw - Z\int y\, dw = 0$$
$$\int M_o x\, dw - X\int xy\, dw - Y\int x^2 dw - Z\int x\, dw = 0$$
$$\int M_o\, dw - X\int y\, dw - Y\int x\, dw - Z\int dw = 0$$

Se vede că putem să simplificăm aceste ecuaţii, aşa fel ca în fiecare din ele să nu avem de cât o singură necunoscută, dacă alegem astfel origina în cât

$$\int y\, dw = 0, \quad \int x\, dw = 0, \quad \int xy\, dw = 0$$

cu alte cuvinte alegem origina în centrul de greutate al elementelor elastice dw. Atunci vom avea

$$X = \frac{\int M_o y\, dw}{\int y^2 dw}$$

$$Y = \frac{\int M_o x\, dw}{\int x^2 dw}$$

$$Z = \frac{\int M_o\, dw}{\int dw}$$

şi problema se reduce la a exprima aceste integrale.

a). Cadru simetric, sarcină verticală. Să luăm un cadru simetric format din doi stâlpi de egală înălţime h şi o grindă orizontală de deschidere l. (fig. 238). Incărcarea o luăm oarecare pe grinda orizontală. Va trebui să alegem origina, aşa fel ca să îndeplinim condiţiile.

Pentru cele trei bare vom avea greutăţile elastice

$$w_1 = \frac{I_3}{I_1} h, \quad w_2 = w_1, \quad w_3 = \frac{I_3}{I_3} l = l$$

aşa în cât centrul de greutate 0, se găseşte pe verticala din mijloc la distanţa

$$y_o = \frac{2\,w_1 \frac{h}{2}}{2\,w_1 + w_3} = \frac{2\,\frac{I_3}{I_1}\,h\,\frac{h}{2}}{2\,\frac{I_3}{I_1}\,h + l}$$

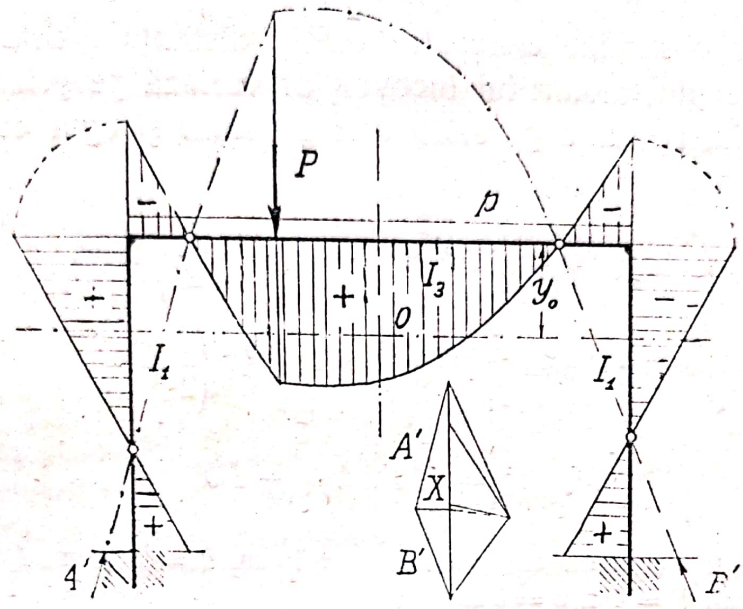


Fig. 238

Putem acum calcula integralele

$$\int y^2\,dw = 2\,\frac{I_3}{I_1}\left[\frac{h^3}{12} + h\left(\frac{h}{2} - y_o\right)^2\right] + \frac{I_3}{I_3}\,l\,y_o^2$$

$$\int x^2\,dw = 2\,\frac{I_3}{I_1}\,h\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{I_3}{I_3}\,\frac{l^3}{12}$$

$$\int dw = 2\,\frac{I_3}{I_1}\,h + l$$

Integralele de la numărător se pot calcula și ele pentru anumite valori ale momentului M_o.

Astfel pentru o sarcină uniform distribuită momentul încovoietor variază pe grindă după o parabolă. Pe stâlpul din dreapta M_o este constant și egal cu $-\frac{pl^2}{2}$, pe când x este constant și egal cu $-\frac{l}{2}$

$$\int M_o\,y\,dw = \frac{I_3}{I_1}\,\frac{pl^2}{2}\,h\left(\frac{h}{2} - y_o\right) - \frac{1}{3}\,\frac{pl^2}{2}\,l\,y_o$$

$$\int M_o\, x\, dw = \frac{I_3}{I_1}\frac{pl^2}{2}\, h\, \frac{l}{2} + \frac{l}{3}\frac{pl^2}{2}\, l\, \frac{l}{4}$$

$$\int M_o\, dw = \frac{I_3}{I_1}\frac{pl^2}{2}\, h + \frac{1}{3}\frac{pl^2}{2}\, l$$

Pentru o sarcină concentrată P la distanţa b dela marginea din dreapta, momentul încovoietor variază pe grindă după un triunghiu, pe când pe stâlp este constant şi egal cu $-Pb$. Vom avea deci

$$\int M_o\, y\, dw = \frac{I_3}{I_1} Pb\, h \left(\frac{h}{2} - y_o\right) - \frac{1}{2} Pb^2\, y_o$$

$$\int M_o\, x\, dw = \frac{I_3}{I_1} Pb\, h\, \frac{l}{2} + \frac{1}{2} Pb^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{3}\right)$$

$$\int M_o\, dw = \frac{I_3}{I_1} Pb\, h + \frac{1}{2} Pb^2$$

Exemplu. Să luăm un cadru $l = 8{,}50$ m, $h = 5{,}20$ m, $I_3/I_1 = 1{,}5$ $p = 800$ kg/ml, $P = 4$ t, $b = 6$ m.

Vom avea pentru centrul de greutate

$$y_o = \frac{1{,}5 \times 5{,}2^2}{2 \times 1{,}5 \times 5{,}2 + 8{,}5} = 1{,}68 \text{ m}$$

şi acum calculăm integralele.

Pentru sarcina distribuită

$$\int M_o\, y\, dw = \left[1{,}5 \times 5{,}2\,(2{,}6 - 1{,}68) - \frac{8{,}5}{2}\, 1{,}68\right] \frac{800 \times 8{,}5^2}{2} = 69\,822$$

$$\int M_o\, x\, dw = \frac{800 \times 8{,}5^2}{2}\left(1{,}5 \times 5.2\, \frac{8{,}5}{2} + \frac{1}{3}\frac{8{,}5^2}{4}\right) = 1\,132\,013$$

$$\int M_o\, dw = -\frac{800 \times 8{,}5^2}{2}\,(1{,}5 \times 5{,}2 + \frac{1}{3}\, 8{,}5) = -\,307\,207$$

Pentru sarcina concentrată

$$\int M_o\, y\, dw = 4000 \times 6\left[1{,}5 \times 5{,}2\,(2{,}6 - 1{,}68) - \frac{1}{2}\, 6 \times 1{,}68\right] = 51\,264$$

$$\int M_o\, x\, dw = 4000 \times 6\left[1{,}5 \times 5{,}2 \times \frac{8{,}5}{2} + \frac{1}{2}\, 6\,(2{,}6 - \frac{6}{3})\right] = 838\,800$$

$$\int M_o\, dw = -\,4000 \times 6\,(1{,}5 \times 5{,}2 + \frac{6}{2}) = -\,259\,200$$

Pentru numitori

$$\int y^2\,dw = 2 \times 1{,}5\left[\frac{5{,}2^3}{12} + 5{,}2\,(2{,}6 - 1{,}68)^2\right] + 8{,}5 \times 1{,}68^2 = 72$$

$$\int x^2\,dw = 2 \times 1{,}5 \times 5{,}2\left(\frac{8{,}5}{2}\right)^2 + \frac{8{,}5^3}{12} = 333$$

$$\int dw = 2 \times 1{,}5 \times 5{,}2 + 8{,}5 = 24{,}1$$

cu acestea se calculează necunoscutele

$$X = \frac{69822 + 51264}{72} = 1686 \text{ kg}$$

$$Y = \frac{1\,132\,013 + 83880}{333} = 5918 \text{ kg}$$

$$Z = -\frac{307\,207 + 259200}{24{,}1} = 23502 \text{ kgm}$$

Mutând aceste rezultate în reazemul înţepenit obţinem reacţiunile şi pe urmă putem scri momentele încovoietoare dealungul cadrului.

In figură s'a desenat diagrama momentelor. Se vede că momentul în stâlpi variază liniar schimbând sensul şi anulându-se. Momentul în grindă urmează sarcina având de asemenea două puncte unde se anulează. S'a desenat de asemenea cu ajutorul poligonului forţelor şi poligonul funicular ale cărui ultime laturi sunt chiar reacţiunile, care ne dă curba de presiune. Acest funicular trece prin punctele unde momentul încovoietor este nul care sunt puncte de inflexie pentru axa deformată.

154. Cadru închis. Să luăm un sistem de bare formând un cadru închis, supus la forţe date. Printre acestea pot fi şi reacţiuni static determinate, cunoscute, adică provenind de la două reazeme static determinate.

Pentru a putea scrie momentul încovoietor vom face o secţie şi în acea secţie vom găsi trei componente M, T, N necunoscute. Sistemul este triplu static nedeterminat.

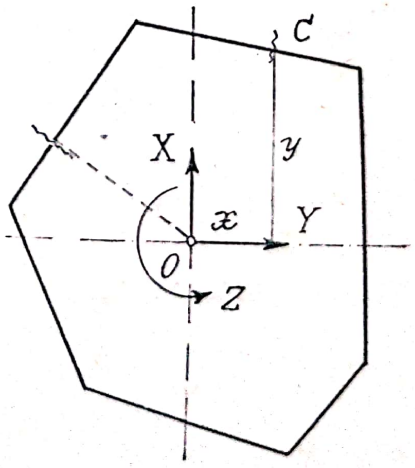


Fig. 239

Dacă în loc de a lua necunoscutele în secţie le mutăm într'un punct O, pe care îl închipuim legat de secţie, vom avea în acest punct trei necunoscute X, Y, Z şi putem scrie momentul într'o secţie oare care, care are coordonatele x, y

$$M = M_o - Xx - Xy - Z$$

Suntem atunci în cazul cadru-

lui înţepenit şi simplificăm problema dacă alegem punctul 0 astfel ca să avem

$$\int x\, dw = 0, \qquad \int y\, dw = 0, \qquad \int xy\, dw = 0$$

adică 0 este centrul de greutate al forţelor elastice reprezentate prin barele cadrului.

Necunoscutele le avem atunci prin formulele cunoscute.

a) *Cadru dreptunghiular, sarcină orizontală.* Să cercetăm

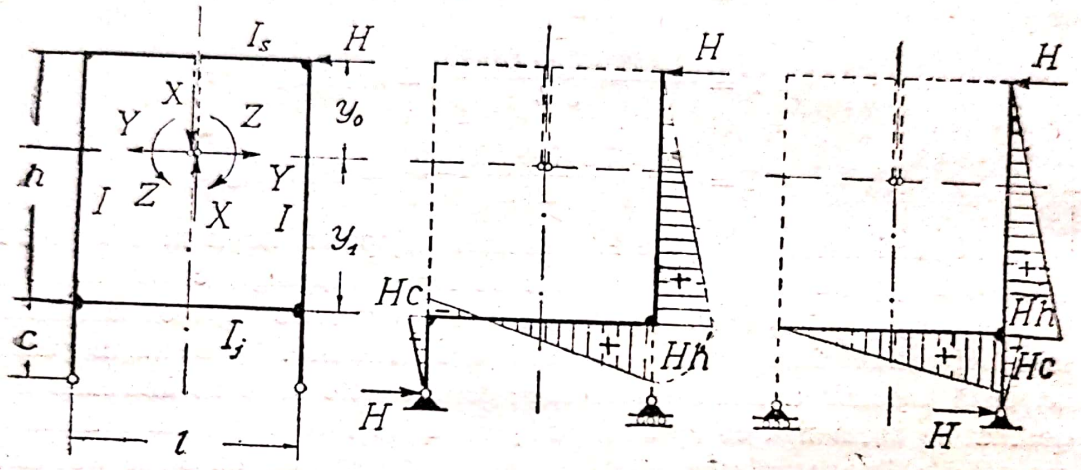


Fig. 240

un cadru dreptunghiular, (fig. 240) deci simetric aşa în cât vom alege $I_m = I$ şi vom avea greutăţile elastice

$$w_1 = w_2 = h\,\frac{I_m}{I} = h$$

$$w_3 = l\,\frac{I_m}{I_s} = l\,\frac{I}{I_s}, \qquad w_4 = l\,\frac{I_m}{I_j} = l\,\frac{I}{I_j}$$

şi deci centrul de greutate va fi dat de

$$y_0 = \frac{h^2 + l\,h\,\dfrac{I}{I_j}}{2\,h + l\left(\dfrac{I}{I_j} + \dfrac{I}{I_s}\right)}$$

Se observă că barele, care sunt în afara cadrului, deci nu sunt încărcate cu necunoscutele static nedeterminate, nu iau parte la lucrul mecanic de deformaţie şi deci nu intră în calcul.

Numitorii din formulele necunoscutelor se pot atunci scrie, ei fiind momentele de inerţie ale cadrului în raport cu axele.

$$\int y^2\,dw = 2\left(\frac{y_o^3}{3}+\frac{y_1^3}{3}\right)+l\left(\frac{I}{I_s}y_o^2+\frac{I}{I_j}y_1^2\right)$$

$$\int x^2\,dw = 2h\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{I}{I_s}+\frac{I}{I_j}\right)\frac{l^3}{12}$$

$$\int dw = 2h+l\left(\frac{I}{I_s}+\frac{I}{I_j}\right)$$

Integralele dela numărător conţin pe M_o, momentul static pentru grinda static determinată sub sarcina H. Acesta este diferit după modul de rezemare, după cum se vede în figură.

In caz când reazemul fix este în stânga, în stâlpul opus forţei H, vom avea

$$\int M_o\,y\,dw = \frac{Hh^2}{2}\left(\frac{2}{3}h-y_o\right)+y_1\frac{I}{I_j}\frac{Hh-Hc}{2}l$$

$$\int M_o\,x\,dw = +\frac{Hh^2}{2}\frac{l}{2}+\frac{Hh+Hc}{2}l\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}\right)\frac{I}{I_j}$$

$$\int M_o\,dw = \frac{Hh^2}{2}+\frac{Hh-Hc}{2}l\frac{I}{I_j}$$

In caz când reazemul fix este în dreapta, în stâlpul în care lucrează forţa H, distribuţia momentelor M_o este alta şi avem

$$\int M_o\,y\,dw = \frac{Hh^2}{2}\left(\frac{2}{3}h-y_o\right)+y_1\frac{I}{I_j}\frac{Hh}{2}l$$

$$\int M_o\,x\,dw = \frac{Hh^2}{2}\frac{l}{2}+\frac{Hh}{2}l\frac{l}{6}\frac{I}{I_j}$$

$$\int M_o\,dw = \frac{Hh^2}{2}+\frac{Hh}{2}l\frac{I}{I_j}$$

Cu ajutorul acestor expresii putem exprima acum necunoscutele.

Exemplu. Portalul unui pod are dimensiile din figură. Să se afle rezistenţele maxime, produse de o forţă orizontală $H = 3{,}5$ t provenită din vântul ce lucrează pe talpa de sus. (Fig. 241)

Vom lucra cu momentele de inerţie brute ale secţiilor date în figură, care sunt

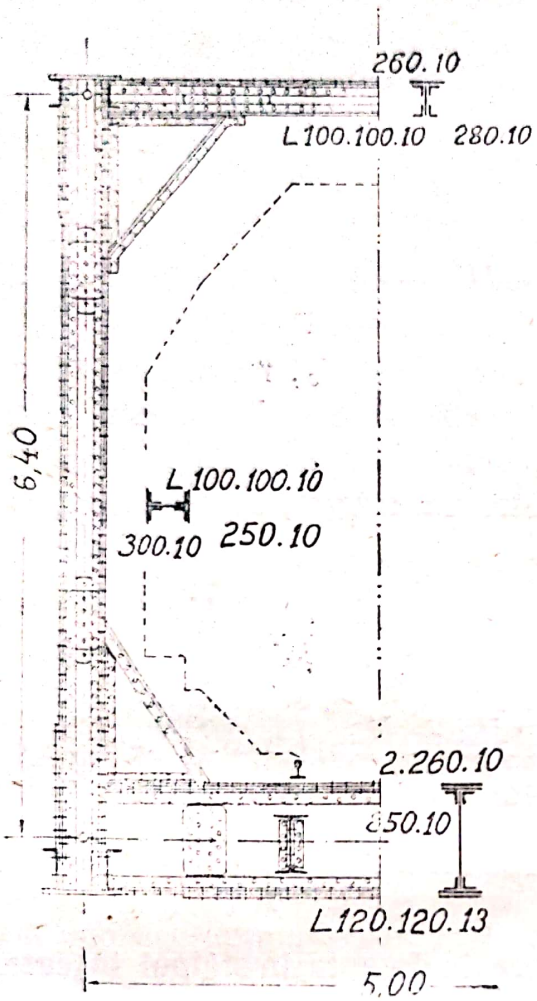


Fig. 241

$$I = 26275 \text{ cm}^4,$$

$$I_s = 19716 \text{ cm}^4,$$

$$I_j = 43003 \text{ cm}^4$$

adică

$$\frac{I}{I_s}=\frac{26275}{19716}= 1{,}33, \frac{I}{I_j}=\frac{26275}{430031} = 0{,}062$$

Centrul de greutate va fi la

$$y_o=\frac{6{,}4^2+5\times 6{,}4\times 0{,}062}{2\times 6{,}4+5\,(1{,}33+0{,}062)}=2{,}11 \text{ m}$$

Calculăm numitorii

$$\int y^2\, dw = \frac{2}{3}(2{,}11^3+4{,}29^3)$$

$$+5\,(1{,}33\times 2{,}11^2+0{,}062\times 4{,}29^2)=94{,}194$$

$$\int x^2\, dw=2\times 6{,}4\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$+(1{,}33+0{,}062)\frac{5^3}{12} = 81{,}45$$

$$\int dw=2\times 6{,}4+5(1{,}33+0{,}062)=19{,}61$$

iar numărătorii pentru cazul al doilea

$$\int M_o\, y\, dw=H\left[\frac{6{,}4^2}{2}\left(\frac{2}{3}\,6{,}4-2{,}11\right)+4{,}29\times 0{,}062\,\frac{6{,}4\times 5}{2}\right]= H.\ 48{,}492$$

$$\int M_o\, x\, dw = H\left(\frac{6{,}4^2\times 5}{4}+0{,}062\,\frac{6{,}4\times 5^2}{12}\right) = H.\ 51{,}86$$

$$\int M_o\, dw = H\left(\frac{6{,}4^2}{2}+0{,}062\,\frac{6{,}4\times 5}{2}\right) = H\ 21{,}472$$

ceea ce ne dă necunoscutele

$$X = H\,\frac{48{,}492}{94{,}194} = H\times 0{,}5148$$

$$Y = H\,\frac{51{,}86}{81{,}45} = H\times 0{,}6367$$

$$Z = H\,\frac{21{,}472}{19{,}61} = H\times 1{,}0949$$

Momentul încovoietor maxim este în colțul din stânga jos și are valoarea

$$M = X y_1 + Z - X\frac{l}{2} =$$

$$= H\,(4{,}29\times 0{,}6367 + 1{,}0949 - 0{,}5148\,\frac{5}{2}) = 888755 \text{ kg cm}$$

ceea ce ne dă rezistenţa

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{888755 \times 15}{26275} = 355 \text{ kg/cm}^2$$

158. Cadru cu două deschideri. Să luăm un cadru cu trei stâlpi, cu două deschideri egale, supus la o sarcină P. Având trei reazeme articulate, în fiecare dintre ele vom avea câte două reacţiuni, deci în total şase reacţiuni, avem deci trei necunoscute static nedeterminate.

Vom alege ca necunoscute împingerea orizontală în primul reazem X_1 şi cele două reacţiuni din reazemul din mijloc X_2

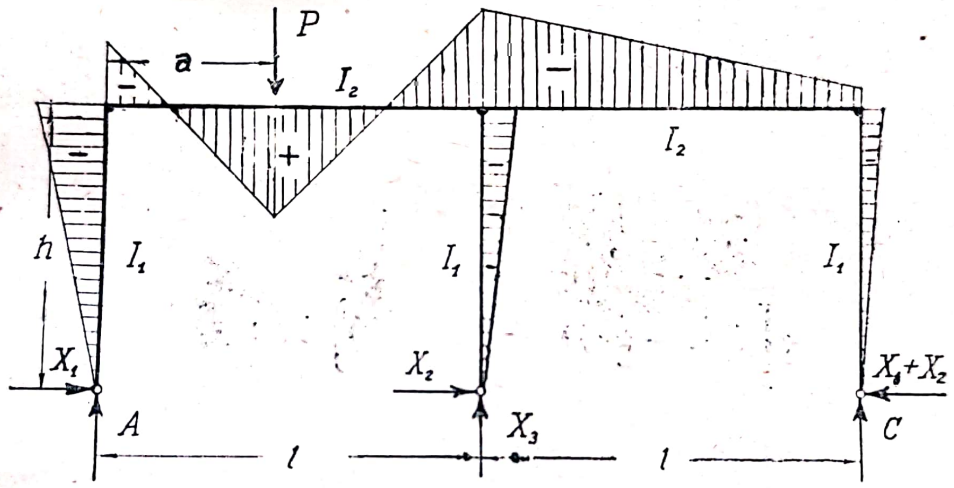


Fig. 242

şi X_3. (fig. 242). Atunci prin ecuaţiile de echilibru avem celelalte trei reacţiuni care sunt

$$A = P\left(1 - \frac{a}{2l}\right) - \frac{X_3}{2}$$

$$C = P\frac{a}{2l} - \frac{X_3}{2}$$

$$X_1 + X_2$$

Vom scrie deci momentele în cei trei stâlpi şi în cele trei porţiuni din grinda orizontală şi vom avea şi derivatele

	$\frac{dM}{dX_1}$	$\frac{dM}{dX_2}$	$\frac{dM}{dX_3}$
$X_1\, y$	y	—	—
$X_2\, y$	—	y	—
$(X_1 + X_2)\, y$	y	y	—
$\left[P\left(1-\frac{a}{2l}\right)-\frac{X_3}{2}\right]x - X_1 h$	$-h$	—	$-\frac{x}{2}$
$\left[P\left(1-\frac{a}{2l}\right)-\frac{X_3}{2}\right]x - X_1 h - P(x-a)$	$-h$	—	$-\frac{x}{2}$
$\left[P\frac{a}{2l}-\frac{X_3}{2}\right]x-(X_1+X_2)\,h$	$-h$	$-h$	$-\frac{x}{2}$

aşa încât teorema lui Castigliano ne va da pentru cele trei necunoscute

$$\frac{1}{I_1}\int_0^h X\, y^2\, dy + \frac{1}{I_1}\int_0^h (X_1+X_2)\, y^2\, dy -$$

$$\frac{1}{I_2}\int_0^l \left\{\left[P\left(1-\frac{a}{2l}\right)-\frac{X_3}{2}\right]x - X_1 h\right\} h\, dx$$

$$-\frac{1}{I_2}\int_a^l \left\{\left[P\left(1-\frac{a}{2l}\right)-\frac{X_3}{2}\right]x - X_1 h - P(x-a)\right\} h\, dx$$

$$-\frac{1}{I_2}\int_0^l \left[P\frac{a}{2l}-\frac{X_3}{2}\right]x-(X_1+X_2)\,h\Big\}\, h\, dx = 0$$

$$\frac{1}{I_1}\int_0^h X_2\, y^2\, dy + \frac{1}{I_1}\int_0^h (X_1+X_2)\, y^2\, dy$$

$$-\frac{1}{I_2}\int_0^l \left\{\left[P\frac{a}{2l}-\frac{X_3}{2}\right]x-(X_1+X_2)\,h\right\} h\, dx = 0$$

$$\frac{1}{I_2}\int_0^a \left\{\left[P\left(1-\frac{a}{2l}\right)-\frac{X_3}{2}\right]x - X_1 h\right\}\frac{x}{2}\, dx +$$

$$\frac{1}{I_2}\int_a^l \left\{\left[P\left(1-\frac{a}{2l}\right)-\frac{X_3}{2}\right]x - X_1 h\right\}\frac{x}{2}\,dx$$

$$+\frac{1}{I_2}\int_0^l \left\{\left[P\frac{a}{2l}-\frac{X_3}{2}\right]x-(X_1+X_2)h\right\}\frac{x}{2}\,dx = 0$$

ceeace ne dă integrând, făcând calculele şi simplificând, un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute, din care aflăm pe X_1, X_2, X_3

$$X_1\left(2\frac{I_2}{I_1}\frac{h^3}{3}+2h^2l\right)+X_2\left(\frac{I_2}{I_1}\frac{h_3}{3}+h^2l\right)+X_3\frac{hl^2}{2}=Phl^2\lambda\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$X_1\left(\frac{I_2}{I_1}\frac{h^3}{3}+h^2l\right)+X_2\left(2\frac{I_2}{I_1}\frac{h^3}{3}+h^2l\right)+X_3\frac{hl^2}{4}=P\frac{hl^2}{4}\lambda$$

$$X_1 hl^2+X_2 h\frac{l^2}{2}+X_3\frac{l^3}{3}=P\frac{l^3}{2}\lambda\left(l-\frac{\lambda^2}{3}\right)$$

în care am notat $a/l=\lambda$.

Exemplu. Să calculăm un cadru pentru care avem $l=8$ m, $h=5$ m $I_2/I_1=1{,}5$. Vom afla necunoscutele static nedeterminate pentru o poziţie oarecare a sarcinei P, şi pe urmă făcând să varieze λ vom avea linia de influenţă a acelei mărimi.

Avem

$$2\frac{I_2}{I_1}\frac{h_3}{3}=2\times 1{,}5\frac{5^3}{3}=125\quad,\quad 2h^2l=400$$

$$hl^2=5\times 8^2=320\quad,\quad \frac{l^3}{3}=\frac{8^3}{3}=170{,}7\quad,\quad \frac{l^3}{2}=\frac{8^3}{2}=256$$

aşa în cât ecuaţiile devin

$$525\,X_1+262{,}5\,X_2+160\,X_3=320\,P\lambda\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$262{,}5\,X_1+525\,X_2+80\,X_3=80\,P\lambda$$

$$320\,X_1+160\,X_2+170{,}7\,X_3=256\,P\lambda\left(1-\frac{\lambda^2}{3}\right)$$

Calculăm determinaţii acestui sistem de ecuaţii

$$D=\begin{vmatrix}525 & 262{,}5 & 160\\ 262{,}5 & 525 & 80\\ 320 & 160 & 170{,}7\end{vmatrix}=15\,126\,890$$

$$D_1=\begin{vmatrix}330\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) & 262{,}5 & 160\\ 80 & 525 & 80\\ 256\left(1-\frac{\lambda^2}{3}\right) & 160 & 170{,}7\end{vmatrix}=6\,916\,900-12\,290\,800\lambda+5\,376\,000\lambda^2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 525 & 320\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) & 160 \\ 262{,}5 & 80 & 80 \\ 320 & 256\left(1-\frac{\lambda^2}{3}\right) & 107{,}7 \end{vmatrix} = -3\,073\,400 + 3\,073\,400\,\lambda$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 525 & 262{,}5 & 320\left(1-\frac{\lambda}{2}\right) \\ 262{,}5 & 525 & 80 \\ 320 & 160 & 256\left(1-\frac{\lambda^2}{3}\right) \end{vmatrix} = 12\,600\,000 + 20\,160\,000\,\lambda - 17\,640\,000\,\lambda^2$$

care ne dau soluţiile

$$X_1 = P\lambda\frac{D_1}{D} = P\lambda\,(0{,}457 - 0{,}812\,\lambda + 0{,}355\,\lambda^2)$$

$$X_2 = P\lambda\frac{D_2}{D} = -P\lambda\,0{,}203\,(1-\lambda)$$

$$X_3 = P\lambda\frac{D_3}{D} = P\lambda\,(0{,}833 + 1{,}333\,\lambda - 1{,}166\,\lambda^2)$$

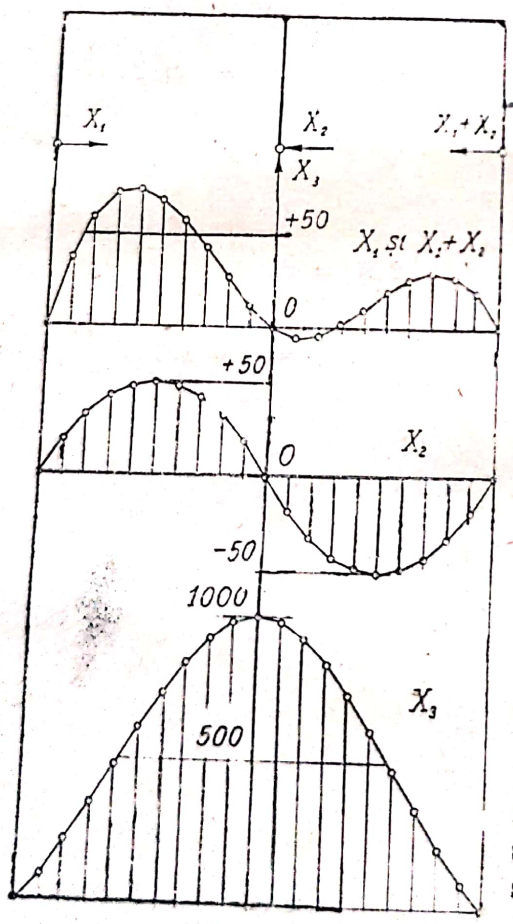


Fig. 243

Făcând să varieze λ putem calcula cele trei mărimi static nedeterminate în Kg. pentru $P = 1$ tonă şi avem tabloul de mai jos, care ne dă astfel liniile de influenţă pentru acestea. Ele sunt desenate în figură (fig 243).

Se poate observa că atunci când P calcă în prima deschidere avem în reazemul din stânga reacţiunea X_1, pe când în reazemul din dreapta avem reacţiunea $X_1 + X_2$. Când P calcă în a doua deschidere, atunci în reazemul din stânga avem reacţiunea X_1+X_2, pe când în reazemul din dreapta avem pe X_1. Cele două linii de influenţă pentru X_1 şi X_1+X_2 sunt aceleaşi, una fiind imaginea celeilalte.

Celelalte două linii de influenţă pentru X_2 şi X_3 se văd pe figură şi nu au nevoie de vre-o explicaţie. Ele sunt simetrice şi anume X_2 schimbă semnul în a doua deschidere, pe când X_3 arată simetrie faţă de axă.

Cu ajutorul acestor linii de influenţă, fie pe desen, fie întrebuinţând tabloul şi interpolând se pot afla valorile necunoscutelor pentru un convoi mobil ce se mişcă pe grinda de sus a cadrului.

λ	X_1	X_2	X_3	$X_1 + X_2$
0,1	37,93	—18,27	95,46	19,66
0,2	59,98	—32,48	210,59	27,50
0,3	73,42	—42,63	338,39	30,79
0,4	75,60	—48,72	471,85	26,88
0,5	69,87	—50,75	604,00	19,12
0,6	58,56	— 48,72	727,82	9,84
0,7	43,78	—42,83	836,33	1,15
0,8	27,68	—32,48	922,53	— 4,80
0,9	12,37	—18, 7	979,42	— 5,92
1,0	0,00	— 0,00	1000,00	0,00

156. **Cadre multiple şi cu etaje.** Mijlocul de calcul dat de relaţia lui Castigliano reuşeşte când problema este simplă şi numărul necunoscutelor mic. Când avem cadre multiple, cu numeroşi stâlpi sau cu etaje având numeroase grinzi, numărul nodurilor, barelor şi reazemelor fiind foarte mare, întrebuinţarea şi rezolvarea ecuaţiilor devine dificilă.

In aceste cazuri se întrebuinţează alte metode, care depăşesc însă cadrul nostru şi se găsesc în tratatele speciale. In loc să se reducă sistemul la unul static determ nat şi să se calculeze necunoscutele, se întrebuinţează diferite ecuaţii de deformaţie, alegând alte necunoscute, sau reducând la un sistem static nedeterminat mai simplu.

In fine sunt şi metode de calcul aproximative, mai îndemânatice, cu care, făcând diferite ipoteze simplificatoare, alegând punctele unde momentul este nul, sau făcând o anumită împărţire a momentelor încovoietoare, se calculează cadrele multiple.

§ 4. Arce, bolţi.

157. **Arc articulat.** Să luăm arcul după o curbă oarecare, articulat în cele două reazeme de acelaş nivel. Reazemele fiind

amândouă fixe, echivalente cu câte două reacţiuni, vom avea patru reacţiuni, deci o singură necunoscută static nedeterminată. Alegem împingerea orizontală drept necunoscută X.

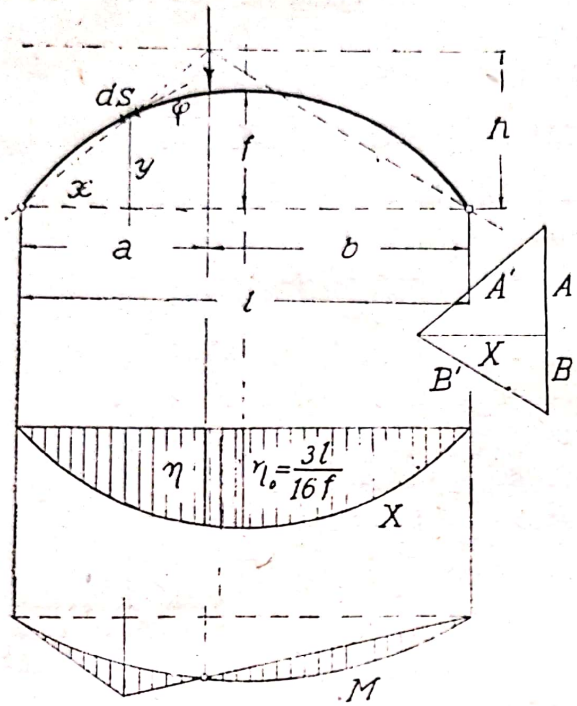


Fig. 244

Intr'o secţie oarecare, dată prin coordonatele x, y, (fig 244) vom avea un moment încovoietor M şi o forţă normală N, dirijată după axă, care este tangenta în acel punct şi face cu axa orizontală unghiul φ

$$M = M_o - Xy$$

$$N = -\frac{X}{\cos\varphi}$$

aşa încât relaţia lui Castigliano devine

$$-\int \frac{1}{EI}(M_o - Xy)\,y\,ds + \int \frac{1}{E\,\Omega}\frac{X}{\cos\varphi}\frac{ds}{\cos\varphi} = 0$$

în care am luat elementul de arc ds.

In cazurile cele mai dese curba este destul de turtită ca să luăm $ds = dx$, $\cos\varphi = 1$. In caz când secţia e variabilă vom lua o valoare medie pentru I şi Ω. Ecuaţia devine

$$\int M_o\,y\,dx - X\left(\int y^2\,dx + \frac{I}{\Omega}\,l\right) = 0$$

$$X = \frac{\int M_o\,y\,dx}{\int y^2\,dx + \frac{I}{\Omega}\,l}$$

Termenul al doilea dela numitor se neglijează adeseori, căci lucrul mecanic al forţelor normale este mult mai mic de cât acel al momentelor.

a) Arc parabolic. Când luăm un arc parabolic putem uşor calcula expresiile integralelor. Formulele obţinute se întrebuinţează

şi pentru un arc destul de turtit, care se aseamănă cu o parabolă.

Integrala de la numitor reprezintă momentul de inerţie al arcului de curbă. Ecuaţia parabolei este

$$y = \frac{4 f x (l - x)}{l^2}$$

aşa în cât

$$\int y^2 d x = \int_0^l \frac{16 f^2}{l^4} x^2 (l - x)^2 d x = \frac{8}{15} f^2 l$$

Integrala de la numărător o vom afla în acelaş mod. Pentru o sarcină uniform distribuită

$$M_o = \frac{p x (l - x)}{2}$$

şi deci

$$\int M_o y d x = \frac{p}{2} \frac{4 f}{l^2} \int_0^l x^2 (l - x)^2 d x = \frac{p f l^3}{15}$$

aşa în cât rezultă

$$X = \frac{p l^2}{8 f}$$

Pentru o sarcină concentrată P, la distanţele a şi b de reazeme, avem

$$\int M_o y d x = \int_0^a \frac{P b}{l} x \frac{4 f}{l^2} x (l - x) d x + \int_0^b \frac{P a}{l} x' \frac{4 f}{l^2} x' (l - x') d x'$$

$$= \frac{P a f (l^3 - 2 a^2 l + a^3)}{3 l^2}$$

aşa în cât rezultă

$$X = \frac{5}{8} \frac{P a}{f l^3} (l^3 - 2 a^2 l + a^3)$$

b). Linia de influenţă. Să aflăm linia de influenţă a reacţiunii static nedeterminate X.

Putem să scrim după expresia de mai sus în care luăm poziţia sarcinii $P = 1$ variabilă, $a = x$,

$$\eta = \frac{5 l}{8 f} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

Putem însă afla linia de influenţă şi din exprimarea deformaţiilor. Putem scrie săgeata într'un punct m al arcului, luând pentru $X = 1$, $M_m = y$, deci

$$\delta_{mo} = \int \frac{M_o M_m}{E I} ds = \frac{1}{E I} \int M_o y \, dx$$

integrala căutată este deci săgeata într'un punct, care se poate scri după cum ştim ca momentul suprafeţei momentelor M_m care este tocmai curba y, adică o parabolă.

$$E I \delta_{mo} = \frac{1}{3} f l x - \int_o^x y \, d\xi \, (x - \xi) = \frac{f l^2}{3} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

ceeace ne duce la

$$X = \frac{5 l}{8 f} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

Linia de influenţă, reprezentând momentul suprafeţei momentelor, este poligonul funicular construit pe aceste forţe.

In loc de această curbă se ia o parabolă, care se alege aşa fel în cât suprafaţa ei să fie echivalentă cu aceea a curbei. Dacă ordonata maximă la mijloc a parabolei este η_o vom avea

$$\frac{2}{3} \eta_o l = \int \frac{5 l}{8 f} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right) dx = \frac{l^2}{8 f}$$

deci parabola care reprezintă linia de influenţă a reacţiunii X va avea ordonata la mijloc

$$\eta_o = \frac{3 l}{16 f}$$

şi într'un punct oarecare a, b

$$\eta = \frac{3 a b}{4 f l}$$

Cele două reacţiuni A', B' trebuind să facă echilibru forţei P, trebuesc să fie concurente, deci

$$h = a \frac{A}{X} = a \frac{\frac{P b}{l}}{P \frac{3 a b}{4 f l}} = \frac{4 f}{3} = \frac{l}{4 \eta_o}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci punctul de întâlnire al reacţiunilor se mişcă pe o dreaptă paralelă cu orizontala reazemelor la distanţa h.

Putem atunci să aflăm linia de influenţă a momentului încovoietor în secţia m.

$$M = M_o - X y$$

va trebui deci ca din linia cunoscută a momentului M_o, triunghiul, să scădem linia X în care am înmulţit ordonatele cu y, ordonata punctului. Putem să facem aceasta dacă căutăm punctul unde momentul este nul, şi acesta se obţine când reacţiunea A' trece prin m, deci poziţia forţei este dată de intersecţia reacţiunii cu linia paralelă la distanţa h.

c). Temperatura. La arce este important să ţinem seamă de variaţiile de temperatură. Supus la o temperatură t vom avea o dilataţie a arcului, care va da o deplasare reazemului $\alpha t l$. La aceasta se opune reacţiunea X, care va da momente şi forţe normale în arc

$$M = X y$$

$$N = -\frac{X}{\cos \varphi}$$

aşa în cât vom avea

$$\alpha t l = \int \frac{M}{E I} \frac{d M}{d X} ds + \int \frac{N}{E \Omega} \frac{d N}{d X} ds$$

făcând aceleaşi înlocuiri găsim

$$X = \frac{\alpha t E I}{\frac{8}{15} f^2 + \frac{I}{\Omega}}$$

Exemplu. Acoperişul unei hale de 20 m deschidere îl facem cu un arc de lemn. Săgeata arcului este 3,0 m. Greutatea proprie a acoperişului $g = 80$ kg/m², sarcina accidentală zăpadă, vânt $p = 100$ kg/m². Distanţa între arce 4,5 m.

Vom avea

$$g = 80 \times 4{,}5 = 360 \text{ kg/ml}$$
$$p = 100 \times 4{,}5 = 450 \text{ kg/ml}$$

Impingerea maximă va avea loc pentru încărcarea totală a arcului şi va fi

$$X = \frac{(p+g) l^2}{8 f} = \frac{810 \times 20^2}{8 \times 3} = 13500 \text{ kg}$$

Scanned with OKEN Scanner

vom lua această împingere cu un tirant de fier, şi pentru că va trebui făcută o îmbinare cu un bulon, alegem două bare de 1 3/4'', adică 45 mm diametru.

Pentru această încărcare momentul în arc este nul. Pentru a obţine încărcarea defavorabilă trebue să luăm sarcina accidentală pe jumătate din deschidere. Pentru această sarcină avem

$$M_o = \frac{3\,p\,l}{8}\,x - \frac{p\,x^2}{2}, \qquad M'_o = \frac{p\,l\,x'}{8}$$

şi deci

$$\int M_o\,y\,dx = \int_o^{\frac{l}{2}} \left(\frac{3\,p\,l}{8}\,x - \frac{p\,x^2}{2}\right)\frac{4\,f}{l^2}\,x\,(l-x)\,dx +$$

$$+ \int_o^{\frac{l}{2}} \frac{p\,l}{8}\,x'\,\frac{4\,f}{l^2}\,x'\,(l-x')\,dx' = \frac{p\,f\,l^3}{30}$$

deci

$$X = \frac{p\,l^2}{16\,f}$$

şi momentul încovoietor este maxim la un sfert, unde $y = 3f/4$

$$M_{max} = \frac{3\,p\,l}{8}\,\frac{l}{4} - \frac{p\,l^2}{2\times 16} - \frac{p\,l^2}{16\,f}\,\frac{3\,f}{4} = \frac{p\,l^2}{64}$$

Vom avea deci pentru greutatea proprie şi sarcina

$$M_{max} = \frac{p\,l^2}{64} = \frac{450\times 20^2}{64} = 3000 \text{ kgm}$$

$$X = \frac{g\,l^2}{8\,f} + \frac{p\,l^2}{16\,f} = \left(360 + \frac{450}{2}\right)\frac{20^2}{8\times 3} = 9750 \text{ kg}$$

Secţia se va calcula la încovoiere cu compresiune. Alegem secţia făcută din 6 scânduri de 2 cm şi o înălţime de 50 cm.

$$W = \frac{1}{6}\,b\,h^2 = \frac{12\times 50^2}{6} = 5000 \text{ cm}^3$$

$$\Omega = 12\times 50 = 600 \text{ cm}^2$$

şi deci

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{\Omega} = \frac{300000}{5000} + \frac{9750}{600} = 76 \text{ kg/cm}^2$$

Arcul se va face deci din 6 scânduri de 2 cm, tăiate după forma curbei, pe o înălţime de 50 cm, bătute în cuie.

158. **Arc cu coardă.** Pentru a evita împingerea în reazeme se pune o coardă. Arcul este atunci static determinat în exterior, fiind rezemat pe două reazeme cu reacţiunile verticale; nede-

Scanned with OKEN Scanner

terminarea este interioară şi necunoscuta X este tensiunea în coardă.

Relaţia lui Castigliano este

$$-\int \frac{1}{EI}(M_o - Xy)\, y\, ds + \int \frac{1}{E\,\Omega}\,\frac{X}{\cos\varphi}\,\frac{ds}{\cos\varphi} + \frac{X\,l}{E\,\Omega_c} = 0$$

din care scoatem

$$X = \frac{M_o\, y\, dx}{\int y^2\, dx + \left(\frac{I}{\Omega} + \frac{I}{\Omega_c}\right) l}$$

aşa în cât rezultatele vor fi aceleaşi, ca la arcul cu două articulaţii, înmulţind cu un coeficient

$$k = \frac{l}{1 + \frac{15}{8f^2}\left(\frac{I}{\Omega} + \frac{I}{\Omega_c}\right)}$$

pentru arcul parabolic.

De obicei coarda se susţine prin câţiva tiranţi, care să suporte greutatea ei proprie. Câte odată se întrebuinţează o coardă ridicată, aşezată mai sus pentru a permite trecerea, şi în acest caz tensiunile în tiranţi se măresc şi atârnă de necunoscuta X. Termenii corespunzători trebuesc atunci introduşi în relaţia lui Castigliano, prin suma lucrurilor mecanice din aceste bare. Câteodată coarda se aşează în două puncte oarecare în care caz relaţia rămâne de aceiaşi formă, schimbându-se limiţele de integrale (fig 245).

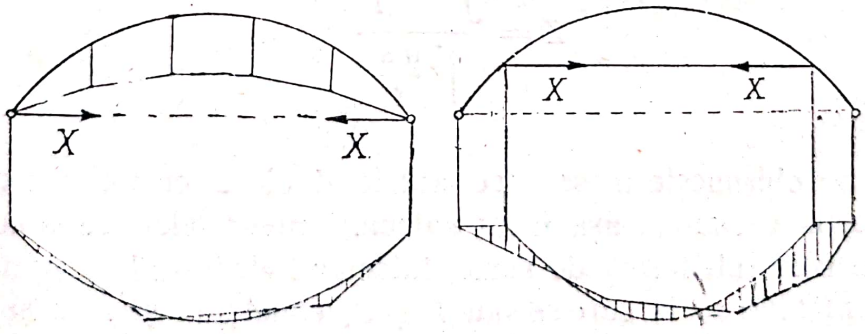


Fig. 245

159. Arc înţepenit. In caz când arcul este simetric, ceea ce este cazul cel mai des întâlnit, vom alege ca axă axa de simetrie şi una perpendiculară pe ea, iar ca origină centrul de

greutate elastic, pentru a simplifica ecuaţiile. (fig. 246). Necunoscutele sunt mutate în origină şi le numim X, Y, Z. Momentul într'o secţie este atunci

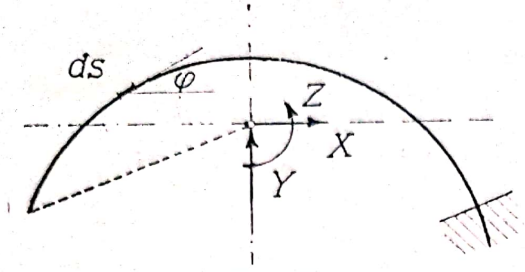


Fig. 246

$$M = M_o - X y - Y x - Z$$

$$N = N_o - X \cos\varphi - Y \sin\varphi$$

de care vom ţine seamă în relaţiile lui Castigliano

$$\int \frac{M}{E I} \frac{d M}{d X} ds + \int \frac{N}{E \Omega} \frac{d N}{d X} ds = 0$$

ceea ce ne duce la

$$X = \frac{\int M_o \, y \frac{d s}{I}}{\int y^2 \frac{d s}{I} + \int \frac{d s}{\Omega}}$$

$$Y = \frac{\int M_o \, x \frac{d s}{I}}{\int x^2 \frac{d s}{I}}$$

$$Z = \frac{\int M_o \frac{d s}{I}}{\int \frac{d s}{I}}$$

Se obişnueşte a se face arcele după o curbă oarecare, cu secţia variabilă, aşa încât calculul integralelor ce apar se poate face sub formă de sume, înlocuind elementul ds printr'un element finit s_1, la care se iau I_1 şi Ω_1 constante şi care ne dau prin sumare valorile căutate. Această sumare se poate face şi grafic, integralele reprezentând momente şi deci se pot afla prin poligoane funiculare.

Pentru arcul parabolic putem calcula în ipoteze simplificatoare mai uşor toate aceste elemente.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă luăm

$$\frac{ds}{I} = \frac{dx}{I\cos\varphi} = \frac{dx}{I_m}$$

luând deci un moment de inerţie mediu, atunci centrul de greutate elastic al arcului de parabolă este la 2/3 din săgeată, şi deci ecuaţia parabolei devine

$$y = \frac{f}{3\,l^2}\,(l^2 - 12\,x^2)$$

ceea ce ne permite să calculăm integralele de la numitor.

De asemenea scriind expresia momentului M_o pentru o încărcare simplă, putem să calculăm integralele dela numărător, exerciţiu ce este lăsat cititorului.

Când avem sarcini mobile nu putem calcula de cât cu linii de influenţă. Pentru secţii variabile şi formă de arc oarecare stabilirea liniilor de influenţă se face grafic, ca poligoane funiculare.

Arcele înţepenite sunt foarte întrebuinţate pentru podurile în arc, şi în tratatele speciale se găseşte problema examinată pe larg.

Exemplu. O boltă este trasată după un arc de cerc, deschiderea de 40 m, săgeata la mijloc 8,0 m, grosime la chee 1,10 m, la naşteri 1,90 m.

Raza cercului cu care trasăm curba este

$$R = \frac{l^2 + f^2}{2f} = \frac{400 + 64}{2 \times 8} = 29\text{ m}$$

şi atunci cunoaştem ecuaţia cercului

$$x^2 + (y + 21)^2 = 29^2 = 841$$

şi deci putem scri coordonatele punctelor.

Secţia este variabilă. Vom alege segmente egale pe orizontală şi anume de 4,0 m şi vom avea astfel 5 segmente, ale căror elemente elastice variază după

$$\frac{I_0}{I\cos\varphi} = \frac{h_0^3}{h^3\cos\varphi} = \frac{1{,}351}{h^3\cos\varphi}$$

luând o lăţime de boltă b egală cu unitatea.

Pentru a afla centrul de greutate elastic, care se găseşte pe axa de simetrie, vom întocmi următorul tablou

Nr.	x m	y m	h m	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$\frac{1{,}331}{h^3\cos\varphi}$	$\frac{I_0}{I\cos\varphi}y$ m
1	2	7,931	1,18	1,002	0,812	6,440
2	6	7,372	1,34	1,059	0,586	4,320
3	10	6,221	1,50	1,106	0,436	2,712
4	14	4,397	1,66	1,198	0,345	1,516
5	18	1,738	1,82	1,334	0,294	0,511
					2,473	15,499

$$y_0 = \frac{15{,}499}{2{,}473} = 6{,}267 \text{ m}$$

Pentru exprimarea necunoscutelor avem nevoie de sumele de la numitor, calculate faţă de noile axe. Pentru termenul datorit forţei normale vom calcula

$$\frac{I_0}{\Omega\cos\varphi} = \frac{b\,h_0^3}{12\,b\,h\cos\varphi} = \frac{1{,}331}{12\,h\cos\varphi}$$

şi vom întocmi următorul tablou:

Nr.	y m	y^2	$\frac{I_0}{I\cos\varphi}y^2$ m²	$\frac{I_0}{\Omega\cos\varphi}$ m²	x^2	$\frac{I_0}{I\cos\varphi}x^2$ m²
1	1,664	2,7689	2,167	0,094	4	3,248
2	1,105	1,2210	0,715	0,088	36	21,096
3	— 0,046	0,0002	0,000	0,082	100	43,600
4	— 1,870	3,4959	1,206	0,079	196	67,620
5	— 4,529	20,4304	6,006	0,081	324	95,256
			10,094	0,424		230,820

Numărătorii depind de sarcină. Vom considera greutatea proprie a bolţii de beton şi greutatea umpluturii de pământ, ce se află la 60 cm deasupra cheii. Vom lua bolţarii ca paralelipipede cu secţia medie şi ca înălţime lungimea arcului, pentru volumul de pământ înălţimea medie deasupra bolţii. Vom avea astfel pentru primul segment

$$4{,}42 \times 1{,}18 \times 2{,}4 = 12{,}517 \text{ t}, \qquad 0{,}63 \times 4 \times 1{,}8 = 4{,}535 \text{ t}$$

obţinând astfel datele din tablou

Nr	h m	h' m	G beton	G pământ	G total t	M_o tm	$M_o\, y\, \frac{I_o}{I \cos\varphi}$ tm²	$M_o \frac{I_o}{I \cos\varphi}$ tm
1	1,18	0,63	12,517	4,536	17,053	332,561	449,289	276,039
2	1,34	1,11	14,215	7,992	22,207	809,502	523,747	474,368
3	1,50	2,18	15,912	15,696	31,608	1100,086	— 26,602	479,637
4	1,66	3,92	17,609	28,224	45,833	1261,826	— 813,877	435,329
5	1,82	6,50	19,306	46,800	66,106	1332,616	—1774,711	391,789
					182,807		—1642,154	2057,162

Nu am mai calculat integrala faţă cu axa y, căci din cauza simetriei aceasta este nulă.

Vom avea atunci

$$X = \frac{\int M_o\, y\, \frac{I_o\, ds}{I \cos\varphi}}{\int y^2 \frac{I_o\, ds}{I \cos\varphi} + \int \frac{I_o\, ds}{\Omega \cos\varphi}} = \frac{1642{,}154}{10{,}094 + 0{,}424} = 156 \text{ t}$$

$$Y = 0$$

$$Z = \frac{\int M_o \frac{I_o\, ds}{I \cos\varphi}}{\int \frac{I_o\, ds}{I \cos\varphi}} = \frac{2057{,}162}{2{,}473} = 832 \text{ tm}$$

reacţiuni static nedeterminate, care se suprapun peste cele date de încărcarea de mai sus.

Cap. XVI. Incovoierea barelor curbe.

160. **Forţe exterioare.** Se numeşte o bară curbă, o piesă generată de secţie oarecare, al cărei centru se mişcă pe o curbă oarecare, aşa fel că în tot timpul secţia rămâne normală pe curbă.

Nu vom studia decât barele curbe a căror axă este o curbă plană, şi vom admite deocamdată că şi forţele ce lucrează asupra barei sunt în planul curbei. Forţe care nu ar lucra în planul barei ar avea de efect torsiunea ei odată cu încovoierea, şi ar căuta să scoată bara din planul ei.

Forma curbei este caracterizată prin raza ei de curbură, iar deformaţia produsă constă tocmai în modificarea acestei raze de curbură.

Acţiunea forţei exterioare se traduce în acelaşi mod asupra unei secţii prin momentul încovoietor, forţa tăietoare şi forţa normală.

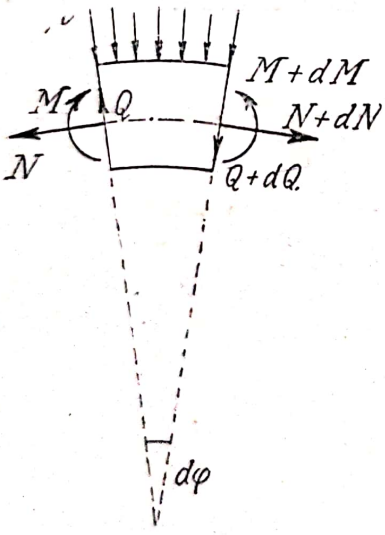


Fig. 247

Să considerăm un element din bară cuprins între două secţii I şi II. Lungimea fibrei axiale este ds, raza de curbură ρ, unghiul la centru $d\varphi$. Avem

$$ds = \rho\, d\varphi$$

Asupra secţiei I lucrează momentul încovoietor M, forţa tăietoare T, forţa normală N. In secţia II, vor lucra aceleaşi elemente sporite cu cantitatea infinit mică $M + dM$, $T + dT$, $N + dN$. In afară de aceasta dealungul barei lucrează o sarcină p.

Să scrim echilibrul acestui element din bară, şi vom afla relaţiunile între aceste trei cantităţi.

Ecuaţia momentelor ne dă

$$M + dM - M - T\,ds + N\,ds \sin d\varphi = 0$$

neglijând ultimul termen care este un infinit mic de ordin superior

$$\frac{dM}{ds} = T$$

relaţie analoagă cu cea de la grinzile drepte.

Ecuaţia de proecţie ne dă

$$2N \sin \frac{d\varphi}{2} + dN \sin \frac{d\varphi}{2} + p\,ds - T \cos \frac{d\varphi}{2} + (T + dT) \cos \frac{d\varphi}{2} = 0$$

unghiul fiind foarte mic vom lua cosinusul egal cu 1 şi sinusul egal cu unghiul. Neglijând infiniţii mici de ordin superior avem

$$p = -\frac{dT}{ds} - N\frac{d\varphi}{ds}$$

ţinând seamă de arcul ds scoatem

$$-p - \frac{N}{\rho} = \frac{dT}{ds} = \frac{d^2M}{ds^2}$$

dacă raza de curbură ρ este infinită, atunci ds devine dx, şi relaţiile de mai sus devin cele cunoscute de la studiul grinzii drepte.

161. Determinarea rezistenţelor interioare. Sunt produse de momentul încovoietor, forţa normală şi forţa tăietoare. Acestea din urmă sunt însă neglijabile, aşa că le vom lua în considerare pe cele dintâi.

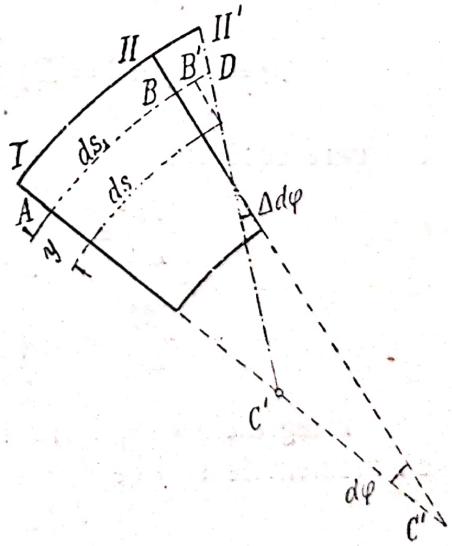


Fig. 248

Momentul încovoietor produce o rotaţie a secţiei, forţa normală o lungire a fibrelor. Rezultă o deplasare a secţiei II în II'. Să luăm o fibră situată la distanţa y de axă, şi a cărei lungime este ds.

$$ds_1 = (y + \rho)\,d\varphi$$

Fibra aceasta se va lungi din

AB în AD. Lungirea BD este produsă de N şi M. Dacă considerăm această lungire BD compusă din $BB' + B'D$ atunci BB' este aceiaşi cu lungirea axei ds, iar unghiul notat în figură este $\Delta d\varphi$. Deci însemnând lungirea specifică a axei cu ε_0, vom avea după figură

$$BD = \Delta ds_1 = \varepsilon_0 ds + y \Delta d\varphi$$

Ipoteza pe care ne bazăm este aceiaşi ca şi la grinzile drepte, adică secţia rămâne tot plană şi face unghiul $\Delta d\varphi$ cu cea veche.

De aici deducem

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds_1}{ds_1} = \frac{\varepsilon_0 ds + y \Delta d\varphi}{(y + \rho) d\varphi}$$

sau

$$\varepsilon = \frac{\rho}{y + \rho} \varepsilon_0 + \frac{y}{y + \rho} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\rho}{\rho + y} \left(\varepsilon_0 + \frac{\Delta d\varphi}{ds} y \right)$$

de unde după legea lui Hooke

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\rho}{\rho + y} \left(\varepsilon_0 + \frac{\Delta d\varphi}{ds} y \right)$$

rezistenţele deci sunt repartizate iperbolic pe secţie, şi pentru a le afla vom scrie ecuaţiile de echilibru

$$N = \int \sigma \, d\Omega = E\rho \int \frac{1}{\rho + y} \left(\varepsilon_0 + \frac{\Delta d\varphi}{ds} y \right) d\Omega$$

$$M = \int \sigma y \, d\Omega = E\rho \int \frac{1}{\rho + y} \left(\varepsilon_0 + \frac{\Delta d\varphi}{ds} y \right) y \, d\Omega$$

din care scoatem

$$\frac{N}{E\rho} = \varepsilon_0 \int \frac{d\Omega}{\rho + y} + \frac{\Delta d\varphi}{ds} \int \frac{y \, d\Omega}{\rho + y}$$

$$\frac{M}{E\rho} = \varepsilon_0 \int \frac{y d\Omega}{\rho + y} + \frac{\Delta d\varphi}{ds} \int \frac{y \, d\Omega}{\rho + y}$$

Integralele care intră în membrul al doilea sunt analoage cu momentele statice şi momentele de inerţie. Să punem

$$\int \frac{y}{\rho + y} d\Omega = - k \Omega$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci avem

$$\int \frac{y^2}{\rho + y} d\Omega = \int \left(y - \frac{\rho y}{\rho + y} \right) d\Omega = -\rho \int \frac{y\, a\Omega}{\rho + y} = k\, \Omega\, \rho$$

$$\int \frac{d\Omega}{\rho + y} = \frac{1}{\rho} \int \frac{\rho + y - y}{\rho + y} d\Omega = \frac{1}{\rho} (1 + k)\, \Omega$$

în acest mod avem

$$\frac{N}{E\rho} = \varepsilon_1 \frac{(1+k)\, \Omega}{\rho} - \frac{\Delta\, d\varphi}{ds} k\, \Omega$$

$$\frac{M}{E\rho} = -\varepsilon\, k\, \Omega + \frac{\Delta\, d\varphi}{ds} k\, \rho\, \Omega$$

din care scoatem

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E\, \Omega} \left(N + \frac{M}{\rho} \right)$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = \frac{1}{E\, \Omega\, \rho} \left(N + \frac{M}{\rho} + \frac{M}{k\, \rho} \right)$$

înlocuind acestea obţinem expresia rezistenţei

$$\sigma = \frac{1}{\Omega} \left(N + \frac{M}{\rho} + \frac{M}{k\, \rho} \frac{y}{\rho + y} \right)$$

Să examinăm puţin aceste formule:

Să presupunem $M = 0$, şi că lucrează numai N.

In acest caz vom avea

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{E\, \Omega}$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = \frac{N}{E\, \Omega\, \rho}$$

şi atunci lungirea fibrelor este

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho + y} \left(\frac{N}{E\, \Omega} + \frac{N\, y}{E\, \Omega\, \rho} \right) = \frac{N}{E\, \Omega} = \varepsilon_0$$

adică toate fibrele au aceiaşi lungire specifică. Ori cum fibrele diferite au lungimi diferite, ele se vor lungi cu cantităţi diferite, şi aşa ca secţiunea II' să treacă prin centrul de curbură C. Rezistenţa în acest caz este

$$\sigma = \frac{N}{\Omega}$$

Scanned with OKEN Scanner

aceiaşi, uniform repartizată pe secţie, iar N lucrează în centrul de greutate al secţiei.

Să presupunem $N = 0$ şi că lucrează numai M.

In acest caz vom avea

$$\varepsilon_0 = \frac{M}{E\,\Omega\,\rho}$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{ds} = \frac{M}{E\,\Omega\,\rho^2}\,\frac{1+k}{k}$$

şi atunci lungirea fibrelor este

$$\varepsilon = \frac{M}{E\,\Omega}\,\frac{1}{\rho+y}\left(1+\frac{1+k}{k}\,\frac{y}{\rho}\right)$$

pentru ca $\varepsilon = 0$, adică poziţia axei neutre este dată de

$$y_0 = -\frac{k\rho}{1+k}$$

Axa neutră deci nu mai trece prin centrul de greutate, şi poziţia ei o aflăm cu ajutorul coeficientului k.

Să presupunem în fine că $\rho = \infty$ adică vom avea o piesă dreaptă. In acest caz ne este permis să neglijăm pe y faţă de ρ şi integrala

$$\int \frac{y^2}{\rho+y}\,d\Omega = k\rho\,\Omega = \frac{I}{\rho}$$

deci $k = 0$, iar expresia lui σ se obţine făcând pe $\rho = \infty$ neglijând pe y faţă de ρ şi avem

$$\sigma = \frac{1}{\Omega}\left(N + \frac{M\,y}{k\,\rho^2}\right) = \frac{N}{\Omega} + \frac{M\,y}{I}$$

formula cunoscută de la grinzile drepte.

162. **Calculul coeficientului** k. Totul depinde de determinarea coeficientului k, coeficient ce joacă rolul momentului de inerţie I. Am pus mai sus

$$k = -\frac{1}{\Omega}\int \frac{y\,d\,\Omega}{\rho+y}$$

or putem să scriem dacă ρ este foarte mare

$$\int \frac{y\,d\,\Omega}{\rho+y} = \frac{1}{\rho}\int y\left(1-\frac{y}{\rho}\right)d\,\Omega = \frac{1}{\rho}\int y\,d\,\Omega - \frac{1}{\rho^2}\int y^2\,d\,\Omega$$

Scanned with OKEN Scanner

cum prima integrală e nulă faţă de axele ce trec prin centrul de greutate, iar a doua este tocmai momentul de inerţie I avem

$$k = \frac{I}{\Omega \rho^2}$$

Dacă raza de curbură e mare, atunci k este foarte mic. Pentru o secţie dreptunghiulară de exemplu

$$k = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{b h \rho^2} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{\rho^2}$$

dacă avem o boltă groasă de 50 cm, a cărei rază este de 30 m vom avea

$$k = \frac{1}{12} \frac{2500}{9000000} = 0{,}0000023$$

suntem deci îndreptăţiţi să calculăm ca şi cum axa neutră ar trece prin centrul de greutate, adică cu formulele de la grinzile drepte.

Dacă raza de curbură este de acelaş ordin de mărime ca dimensiile secţiei nu mai putem face această aproximaţie şi trebue să calculăm pe k.

a) Secţie dreptunghiulară.

In acest caz avem

$$k = -\frac{1}{bh} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{y\, b\, d\, y}{\rho + y} = -1 + \frac{\rho}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{d\, y}{\rho + y}$$

$$= -1 + \frac{\rho}{h} L \frac{\rho + \frac{h}{2}}{\rho - \frac{h}{2}}$$

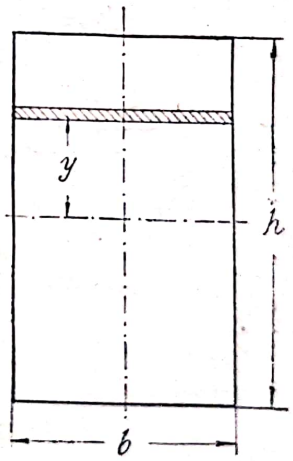


Fig. 249

cum totdeauna avem $h < 2\rho$ vom putea desvolta în serie logaritmul şi avem

$$k = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\rho}\right)^6 + \ldots\ldots$$

b) Secţie circulară. Este mai avantajos în acest caz să dezvoltăm de la început în serie

$$\int \frac{y\,d\Omega}{\rho+y} = \frac{1}{\rho}\int y\,d\Omega - \frac{1}{\rho^2}\int y^2\,d\Omega + \frac{1}{\rho^3}\int y^3\,d\Omega - \ldots.$$

pentru cerc vom anula termenii cu puteri impare din cauza simetriei, aşa că avem

$$k\Omega = \frac{1}{\rho^2}\int y^2\,d\Omega + \frac{1}{\rho^4}\int y^4\,d\Omega + \frac{1}{\rho^6}\int y^6\,d\Omega + \ldots.$$

or din figură avem

$$y = r\sin\varphi \quad , \quad d\Omega = 2r\cos\varphi\, y\cos\varphi\, d\varphi$$

aşa că avem

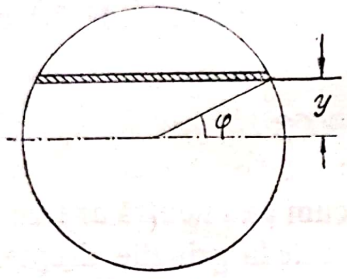


Fig. 250

$$\int y^2\,d\Omega = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\int y^4\,d\Omega = 4r^6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{8}r^6$$

$$\int y^6\,d\Omega = 4r^8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{5}{64}r^6$$

aşa că avem

$$k = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{\rho}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{r}{\rho}\right)^6 + \ldots\ldots$$

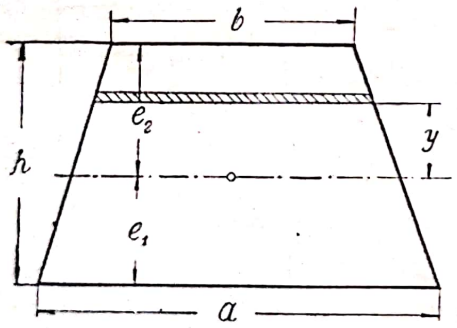


Fig. 251

c). *Secţie trapezoidală.* E o secţie foarte întrebuinţată, mai ales pentru cârlige

$$d\Omega = \frac{dy}{h}\Big\{(e_2 - y)\,a + (y - e_1)\,b\Big\}$$

aşa că

$$k = -\frac{2}{(a+b)\,h}\int_{e_1}^{e_2}\frac{(e_2-y)\,a}{\rho+y}\frac{y\,dy}{h} - \frac{2}{(a+b)\,h}\int_{e_1}^{e_2}\frac{(y-e_1)\,b}{\rho+y}\frac{y\,dy}{h}$$

$$= -\frac{2a}{(a+b)h^2}\int_{-e_1}^{e_2}\frac{e_2-y}{\rho+y}\,y\,dy - \frac{2b}{(a+b)h^2}\int_{-e_1}^{e_2}\frac{y-e_1}{\rho+y}\,y\,dy$$

or integralele ne dau

$$\int_{-e_1}^{e_2} \frac{e_2 - y}{\rho \quad y}\, y\, dy = \int_{-e_1}^{e_2} \left[e_2 + \rho - y - \frac{\rho\,(e_2+\rho)}{\rho + y} \right] dy$$

$$= (e_2+\rho)\,h - \frac{e_2^2 - e_1^2}{2} - \rho\,(e_2+\rho)\,L\frac{\rho + e_2}{\rho - e_1}$$

$$\int_{-e_1}^{e_2} \frac{y - e_1}{\rho + y}\, y\, dy = \int_{-e_1}^{e_2} \left[y - (\rho + e_1) + \frac{\rho\,(e_1+\rho)}{\rho + y} \right] dy$$

$$= \frac{e_2^2 - e_1^2}{2} - (\rho + e_1)\,h + \rho\,(e_1+\rho)\,L\frac{\rho + e_2}{\rho - e_1}$$

vom pune atunci pe k sub forma

$$k = -1 + \frac{2\rho}{(a+b)\,h}\left\{ \left[h + \frac{a-b}{h}(e_2+\rho) \right] L\frac{\rho + e_2}{\rho - e_1} - (a-b) \right\}$$

Pentru cazul triunghiului facem în această expresie $b = 0$, $e_1 = \frac{1}{3}h$, $e_2 = \frac{2}{3}h$ şi avem

$$k = -1 + \frac{2\rho}{h}\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{\rho}{h} \right) L\frac{\rho + \frac{2}{3}h}{\rho - \frac{1}{3}h} - 1 \right]$$

163. **Deformaţia barelor curbe.** Am găsit deformaţiile specifice pe care le suferă un element din bară şi care sunt

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E\,\Omega}\left(N + \frac{M}{\rho} \right)$$

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{E\,\Omega}\left(N + \frac{M}{\rho} + \frac{M}{k\,\rho} \right)$$

putem de aci să aflăm deformaţia barei, şi în primul rând variaţia razei de curbură. Avem

$$ds = \rho\, d\varphi$$

$$\Delta\, ds = \Delta\rho\, d\varphi + \rho\, \Delta\, d\varphi$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta\, ds}{ds} - \frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} = -\frac{M}{k\,E\,\Omega\,\rho}$$

$$\Delta\rho = -\frac{M}{k\,E\,\Omega}$$

Scanned with OKEN Scanner

In cazul când ρ este foarte mare şi putem face ipoteza că avem $k = 0$ şi axa neutră trece prin centrul de greutate, atunci

$$\frac{\Delta\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = -\frac{M}{kE\Omega\rho^2} = \frac{M}{EI}$$

formulă cunoscută de la încovoierea grinzilor drepte.

In cazul general considerând un segment din bara curbă, raportat la două axe rectangulare avem

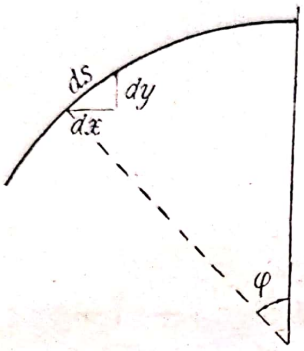


Fig. 252

$$dx = ds\cos\varphi$$
$$dy = ds\sin\varphi$$

de unde

$$\Delta dx = \Delta ds\cos\varphi - ds\sin\varphi\,\Delta\varphi$$
$$\Delta dy = \Delta ds\sin\varphi + ds\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

de unde mai departe, împărţind cu ds

$$\Delta dx = (\varepsilon_0\cos\varphi - \Delta\varphi\sin\varphi)\,ds$$
$$\Delta dy = (\varepsilon_0\sin\varphi + \Delta\varphi\cos\varphi)\,ds$$

prin integrare vom putea astfel afla deplasarea ori cărui punct al curbei ştiind deformaţiile specifice ε_0 şi $\Delta\varphi$.

Ţinând seama de primele relaţii mai putem scrie

$$\Delta dx = \left(\varepsilon_0 - \Delta\varphi\frac{dy}{dx}\right)dx$$

$$\Delta dy = \left(\varepsilon_0 + \Delta\varphi\frac{dx}{dy}\right)dy$$

în care privim pe ε_0 şi $\Delta\varphi$ ca funcţiuni de coordonatele curbei x, y

164. **Aplicaţii.** *a) Calculul unei conducte.* O conductă supusă la o sarcină concentrată $2P$, va fi supusă la încovoiere. Deformaţia ei se va face după linia punctată din figură, (fig. 253) turtindu-se dar păstrând totuşi simetria faţă de axe.

Considerăm un sfert din cerc supus de o parte la forţa P şi de cealaltă parte introducem momentul încovoietor M şi forţa normală care este egală cu P.

Momentul în o secţie normală dată de unghiul φ este

$$M_x = -M + Pr\,(1 - \cos\varphi)$$

Condiţia pe care o vom scrie pentru a afla pe M — static ne-

determinat — este că secţiile A şi B rămân normale şi după deformaţie, adică unghiul rămâne tot drept şi variaţia lui e nulă. După formula cunoscută

$$\int \Delta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M\,ds}{EI} = 0$$

căci considerăm raza de curbură foarte mare faţă de dimensiile secţiei, şi vom avea

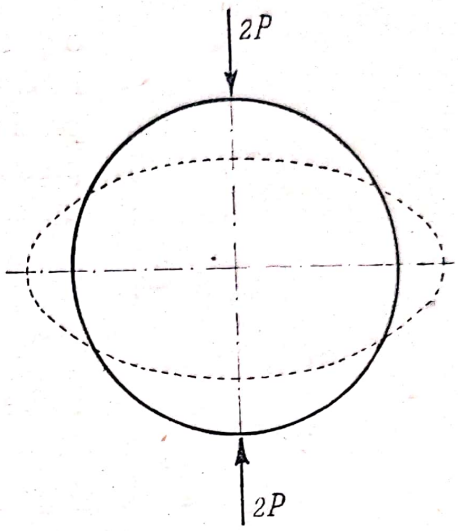


Fig. 253

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-M + Pr\,(1-\cos\varphi)]\,d\varphi = 0$$

$$-M\frac{\pi}{2} + Pr\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0$$

$$M = Pr\,\frac{\pi - 2}{\pi} = 0{,}36\,Pr$$

odată calculată necunoscuta M avem momentul în orice secţie. Astfel

$$M_B = -M + Pr = 0{,}64\,Pr$$

Momentul se anulează pentru un punct C dat de unghiul φ_1 din ecuaţia

$$0 = -M + Pr\,(1-\cos\varphi_1)$$

$$\cos\varphi_1 = 0{,}64$$

$$\varphi_1 = 50^0\ 10'$$

pentru care avem un punct de inflexie şi momentele schimbă semnul

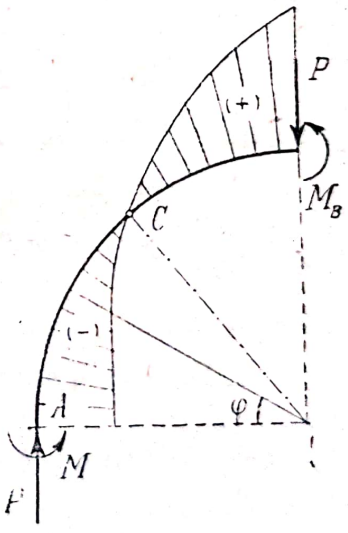


Fig. 254

$$\sigma = \frac{M_B}{W} = \frac{0{,}64\,Pr}{W}$$

secţia periculoasă fiind în B.

b) Calculul inelelor pistonului. Etanşeitatea pistonului este obţinută prin nişte inele sau segmenţi care se uzează prin frecare şi pot fi înlocuite. Un asemenea inel este supus la presiunea ce domneşte în cilindru şi trebue ca după deformaţie să aibă

forma unui cerc pentru a nu uza pereţii şi a avea un contact perfect cu cilindrul.

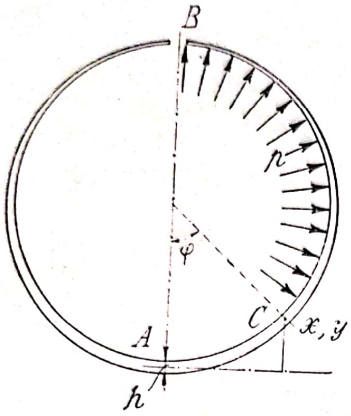


Fig. 255

Putem considera pentru calcul numai o jumătate din inel, şi scrim momentul în o secţie de coordonate x, y, de oarece presiunea arcului $B\,C$ este egală cu presiunea pe coardă, şi luând b lăţimea inelului avem

$$M = -\frac{p\,b \times \overline{BC}^2}{2} = -p\,b\,r^2\,(1+\cos\varphi)$$

rotirea secţiilor este dată de

$$\Delta\varphi = \int_{\pi}^{\varphi} \frac{M\,d\,s}{E\,I} = -\frac{p\,b\,r^3}{E\,I}\left[\sin\varphi + (\varphi - \pi)\right]$$

care pentru $\varphi = \pi$ adică în A devine nulă ceea ce era de aşteptat din cauza simetriei.

Neglijând acţiunea forţei normale N şi pe ε_0 lungirea axei barei avem

$$\Delta\,dx = -\Delta\varphi\sin\varphi\,ds$$
$$\Delta\,dy = \quad \Delta\varphi\cos\varphi\,ds$$

şi de aci deplasările extremităţii libere adică

$$E\,I\,\Delta\,x = +p\,b\,r^4\int_o^{\pi}[\sin^2\varphi + (\varphi-\pi)\sin\varphi]\,d\varphi$$

$$E\,I\,\Delta\,y = -p\,b\,r^4\int_o^{\pi}[\sin\varphi\cos\varphi + (\varphi-\pi)\cos\varphi]\,d\varphi$$

ceea ce ne dă integrând

$$E\,I\,\Delta\,x = +p\,b\,r^4\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} - \varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \pi\cos\varphi\right]$$

$$E\,I\,\Delta\,y = -p\,b\,r^4\left[\frac{\sin^2\varphi}{2} + \varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1 - \pi\sin\varphi\right]$$

sau pentru $\varphi = \pi$.

Scanned with OKEN Scanner

$$E I \Delta x = + p b r^4 \frac{\pi}{2}$$

$$E I \Delta y = + 2 p b r^4$$

Mai interesant este să aflăm variaţia grosimii inelului aşa fel ca axa deformată să fie un cerc cu rază R. In acest caz avem

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{p b r^2 (1 + \cos \varphi)}{E \frac{b h_x^3}{12}}$$

pentru punctul A, $\varphi = 0$, iar grosimea este h, avem

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{r} = \frac{24 p r^2}{E h^3}$$

în orice punct trebue să avem acelaş R deci

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{r} = \frac{24 p r^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{E h_x^3} = \frac{24 p r^2}{E h^3}$$

$$h_x = h \sqrt[3]{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

care ne dă legea după care trebue să varieze grosimea inelului.

c) Calculul unui volan. Am calculat elementar un volan numai la tensiune sub forţa centrifugă şi am stabilit

$$T = \Omega \frac{\gamma}{g} V^2$$

$$\sigma = \frac{T}{\Omega} = \frac{\gamma}{g} V^2$$

adică rezistenţa nu depinde de cât de viteză.

In realitate volanul are braţe, este deci o piesă curbă supusă la încovoiere şi întepenită în dreptul braţelor. Asupra coroanei şi braţelor lucrează forţa centrifugă care ne dă tensiuni în braţe aşa că forţele ar fi cele arătate în figură. Forţa centrifugă C care lucrează asupra coroanei se află imediat. Cu notaţiile din figură (fig. 256) avem

$$C = x_0 \omega^2 \frac{R \varphi \Omega \gamma}{g}$$

Scanned with OKEN Scanner

însă

$$x_0 = \frac{s}{\varphi} = \frac{2R\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi}$$

deci

$$C = \omega^2 \frac{2R\sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi} \cdot \frac{R\varphi\Omega\gamma}{g} = \frac{\omega^2\gamma}{g}\Omega\, 2R^2\sin\frac{\varphi}{2} = \Omega\frac{\gamma}{g}V^2\, 2\sin\frac{\varphi}{2}$$

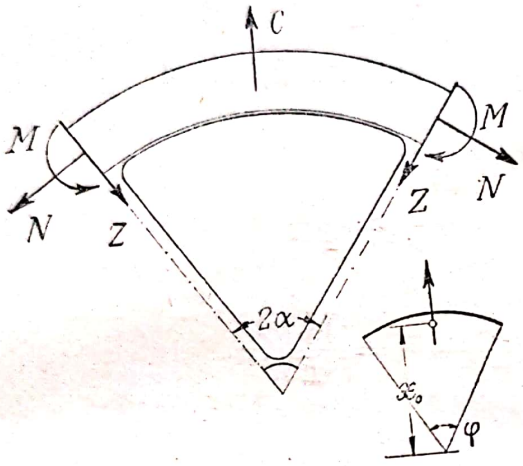


Fig. 256

regăsim deci tensiunea determinată şi în metoda elementară, pe care dacă o notăm cu T_0 avem pentru cazul nostru cu unghiul la centru 2α

$$C = 2T_0\sin\alpha$$

Necunoscutele noastre sunt atunci M, N, Z între care avem ecuaţia de echilibru

$$2N\sin\alpha + 2Z\cos\alpha = C$$

Rămân deci două necunoscute nedeterminate prin statică pentru care vom folosi două ecuaţii de deformaţie.

Volanul având un număr oare care de braţe, unghiul 2α între două braţe rămâne constant şi deformaţia unghiulară e nulă. Va trebui deci să avem

$$\int_0^{2\alpha} \frac{M\,ds}{EI} = 0$$

care constitue prima relaţie.

A doua relaţie o aflăm din deformaţia barelor. Admitem că deformaţia se reduce la lungirea braţelor şi la deformarea arcului (fig. 257). Vom avea mai întâi o deformare λ_1 datorită lui N, pe urmă două deplasări λ_2 şi η_2 în senz tangenţial şi în senz radial datorite lui M. In fine din aceasta avem şi deplasarea η. Or avem

$$\eta\alpha = \lambda_1 + \lambda_2$$

în urma acestor deformaţii braţul se lungeşte cu Δl care este

$$\Delta l = \eta - \eta_2$$

Deformaţiile acestea le putem afla căci

$$\lambda_1 = \varepsilon_0 R\alpha$$

$$\lambda_2 = \int_0^a \frac{M}{EI} R(1 - \cos\varphi) \cdot R\, d\varphi$$

$$\eta_2 = \int_0^a \frac{M}{EI} R \sin\varphi \cdot R\, d\varphi$$

$$\eta = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\alpha}$$

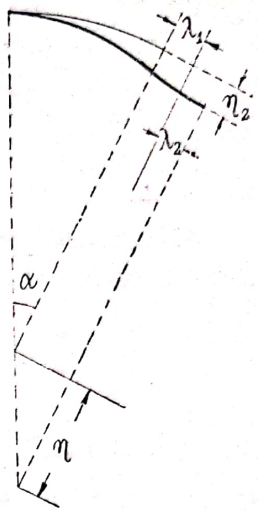


Fig. 257

Lungirea Δl se compune din două părţi: una datorită tensiunii Z şi alta forţei centrifuge. Lungirea datorită tensiunii Z este uşor de scris

$$\frac{Z\,l}{E\,\Omega}$$

acea datorită forţei centrifuge o putem afla examinând forţa ce lucrează

$$C_x = \frac{x\,\Omega\,\gamma}{g}\omega^2\left(r + l - \frac{x}{2}\right)$$

$$\sigma_x = \frac{C_x}{\Omega} = \frac{x\,\gamma}{g}\omega^2\left(r + l - \frac{x}{2}\right)$$

$$\Delta l = \int \varepsilon\, dx = \int_0^l \frac{\omega^2\gamma}{gE} x\left(r + l - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{\omega^2\gamma}{gE} l^2\left(\frac{r}{2} + \frac{l}{3}\right)$$

aşa că lungirea totală este

$$\Delta l = \frac{Z\,l}{E\,\Omega} + \frac{\omega^2\gamma}{gE} l^2\left(\frac{r}{2} + \frac{l}{3}\right)$$

iar ecuaţia a doua de deformaţie este

$$\Delta l = \frac{Z\,l}{E\Omega} + \frac{\omega^2\gamma}{gE} l^2\left(\frac{r}{2} + \frac{l}{3}\right) =$$

$$\varepsilon_o R + \frac{1}{\alpha}\int_o^{\alpha} \frac{M}{EI} R(1 - \cos\varphi) R\,d\varphi - \int_o^{\alpha} \frac{M}{EI} R \sin\varphi . R\,d\varphi$$

Avem astfel cele trei ecuaţii necesare pentru aflarea lui M, N, Z.

Momentul încovoietor M care ia naştere în o secţie oarecare şi care apare în integrală este

$$M = M + NR(1 - \cos\varphi) + ZR\sin\varphi - C_x R \sin\frac{\varphi}{2}$$

şi prezintă două puncte unde este nul, adică unde sunt puncte de inflexie. Momentele maxime sunt în dreptul înţepenirii braţelor.

Imbinarea volanului ar trebui făcută în dreptul punctelor de inflexie, or ea se face în dreptul braţelor unde momentul este maxim, sau la mijlocul deschiderii unde iar este maxim.

Pe lângă momentele încovoietoare ar trebui să mai considerăm cazul când volanul poartă o curea şi atunci braţele sunt încovoiate de acţiunea curelei.

d. Calculul unui inel de lanţ. Luăm cazul simplu al unui inel de lanţ în formă de cerc de rază R, şi cu aceleaşi notaţii ca în primul exemplu scrim

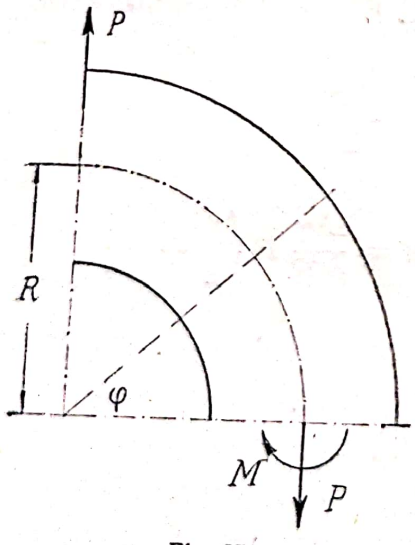


Fig. 258

$$M_x = M - PR(1 - \cos\varphi)$$

$$N = -P\cos\varphi$$

aplicăm aceiaşi condiţie că deformaţia pe un sfert de cerc este nulă.

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \Delta\,d\varphi = 0$$

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{E\Omega}\left(N + \frac{M}{R} + \frac{M}{kR}\right) d\varphi = 0$$

şi înlocuind datele de mai sus avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-P\cos\varphi + \frac{k+1}{k} \frac{1}{R}\left(M - PR(1-\cos\varphi)\right)\right] d\varphi = 0$$

ceea ce ne dă

$$M = \frac{k\pi + \pi - 2}{\pi(k+1)} PR$$

pentru cazul $k=0$, adică raza mare avem rezultatul din exemplul de subt *a*.

Să considerăm cazul $R = 1{,}5\,d$, atunci vom calcula pe k prin desvoltarea în serie

$$k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \ldots = 0{,}0294$$

aşa în cât avem

$$M = \frac{0{,}0294 \times 3{,}14 + 3{,}14 - 2}{3{,}14\,(1 + 0{,}0294)} PR = 0{,}382\,PR$$

$$M_x = M - PR(1-\cos\varphi)$$

$$M_s = (0{,}382 - 1)\,PR = -0{,}618\,PR$$

Rezistenţa în acest caz va fi

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} + \frac{M}{R\Omega} + \frac{M}{kR\Omega}\frac{y}{R \pm y}$$

luând pe $y = \pm \frac{d}{2}$ vom avea pentru secţia B unde $\varphi = 90^\circ$

$$\sigma = -5{,}868\frac{P}{\Omega} \qquad \sigma = +9{,}882\frac{P}{\Omega}$$

în secţia B unde $\varphi = 0$

$$\sigma = -7{,}118\frac{P}{\Omega} \qquad \sigma = +2{,}632\frac{P}{\Omega}$$

Vedem ast-fel că rezistenţa maximă în acest caz este de 10 ori mai mare ca in cazul când am calcula simplu la tensiune inelul de lanţ, împărţind forţa la cele două secţii.

e) Cârlig de macara. Este o piesă de construcţie cu axa

curbă, care se calculează după formulele stabilite. Secţia importantă de calculat este secţia trapez. Dimensia importantă este gura cârligului a. Se ia

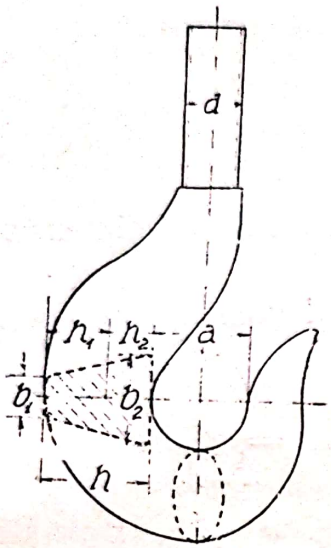


Fig. 259

$$a = 0{,}75\,d - 1\,d \text{ pentru cabluri}$$
$$a = 1 - 1{,}5\,d \text{ pentru lanţuri}$$

grosimea cârligului se ia

$$h = 1 - 1{,}5\,a$$

Vom lua deci pentru secţia noastră

$$b_2 = 2\,b_1, \qquad h = a, \qquad \rho = h_2 + \frac{a}{2}$$

$$h_1 = \frac{h}{3}\frac{b_1 + 2\,b_2}{b_1 + b_2}, \qquad h_2 = \frac{h}{3}\frac{b_2 + 2\,b_1}{b_1 + b_2}$$

ceea ce ne dă

$$h_1 = \frac{5}{9}a, \qquad h_2 = \frac{4}{9}a, \qquad \rho = \frac{17}{18}a$$

$$K = -1 + \frac{2\rho}{(b_1 + b_2)\,h}\left[\left\{b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h}(\rho + h_1)\right\} L\frac{\rho + h_1}{\rho - h_2} - (b_2 - b_1)\right]$$

$$= -1 + \frac{2\frac{17}{18}a}{3\,b_1\,a}\left[\left\{b_1 + \frac{b_1}{a}\left(\frac{17}{18}a + \frac{5}{9}a\right)\right\} L\frac{\frac{17}{18} + \frac{5}{9}}{\frac{17}{18} - \frac{4}{9}} - b_1\right] = 0{,}0996$$

Având toate elementele secţiei, putem să calculăm rezistenţa cu formula

$$\sigma = \frac{N}{\Omega} + \frac{M}{\Omega\,\rho} + \frac{M}{k\,\rho\,\Omega}\frac{y}{\rho + y}$$

în care

$$N = P, \qquad M = -P\rho = -P\left(h_2 + \frac{a}{2}\right)$$

ceea ce ne dă

$$\sigma = \frac{P}{\Omega}\frac{1}{k}\frac{y}{\rho + y}$$

calculând rezistenţa în cele două puncte extreme ale secţiei găsim

$$y = -h_2,\ \sigma_2 = \frac{P}{\Omega}\frac{1}{k}\frac{h_2}{\rho - h_2} = \frac{P}{\Omega}\frac{1}{0{,}0996}\frac{\frac{4}{9}}{\frac{17}{18}-\frac{4}{9}} = 8{,}92\,\frac{P}{\Omega}$$

$$y = h_1,\ \sigma_1 = -\frac{P}{\Omega}\frac{1}{k}\frac{h}{\rho + h_1} = -\frac{P}{\Omega}\frac{1}{0{,}0996}\frac{\frac{5}{9}}{\frac{17}{18}+\frac{5}{9}} = -3{,}29\,\frac{P}{\Omega}$$

Dacă am calcula ca la grinda dreaptă, am fi aduşi să scrim

$$\sigma = \frac{P}{\Omega} + \frac{M}{W}$$

în care avem

$$I = \Omega\frac{h^2}{18}\frac{b_2^2 + 4b_1b_2 + b_1^2}{(b_2+b_1)^2} = \Omega a^2\frac{13}{9\times 18}$$

$$W_1 = \frac{I}{h_1} = \Omega a^2\frac{13}{9\times 18}\frac{9}{5a} = \Omega a\frac{13}{5\times 18}$$

$$W_2 = \frac{I}{h_2} = \Omega a^2\frac{13}{9\times 18}\frac{9}{4a} = \Omega a\frac{13}{4\times 18}$$

ceea ce ne va da pentru rezistenţele în cele două puncte

$$\sigma_2 = \frac{P}{\Omega} + \frac{M}{W_2} = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{17\times 4}{13}\right) = 6{,}23\,\frac{P}{\Omega}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{\Omega} - \frac{M}{W_1} = \frac{P}{\Omega}\left(1 - \frac{17\times 5}{13}\right) = -5{,}54\,\frac{P}{\Omega}$$

Diferenţa între rezultatele calculului ca grindă dreaptă, şi cele obţinute ca grindă curbă ne dau

$$100\,\frac{8{,}92 - 6{,}23}{6{,}23} = 43\%$$

Exemplu. Să se dimensioneze cârligul pentru $P = 10$ t.
Diametrul ghevintului va fi

$$\Omega_{nec.} = \frac{10000}{500} = 20\ \text{cm}^2$$

pentru care corespunde $2^1/_2''$, luăm $d = 70$ mm. Alegem pentru gură $a = 1{,}7\ d = 120$ mm.

Dacă luăm pentru raza de curbură $\rho = \frac{a}{2} + h_2 = r + h_2$ și ne conducem după rezistența maximă găsită.

$$\sigma = -\frac{P}{\Omega}\frac{1}{k}\frac{y}{\rho + y} = \frac{P}{\Omega}\frac{1}{k}\frac{h_2}{\rho - h_2}$$

atunci avem formula simplă

$$P = \frac{k\,\Omega\,r}{h_2}\sigma$$

în care r este raza gurii cârligului, iar h_2 este distanța de la centrul de greutate.

Pentru $d = 70$ mm, $a = 120$ mm, găsim

$$b_2 = 110,\ b_1 = 45,\ h = 130 \text{ mm}$$

la care calculăm

$$h_2 = 55{,}9 \text{ mm},\ h_1 = 74{,}1 \text{ mm},\ \rho = 115{,}9 \sim 116 \text{ mm}$$
$$k = 0{,}109,\ \Omega = 100{,}7 \text{ cm}^2,\ r = 6 \text{ cm}$$

și deci

$$P = \frac{0{,}109 \times 100{,}7 \times 6}{5{,}6}\,900 = 10300 \text{ kg}.$$

Cap. XVII. Starea rezistenţelor în un corp.

165. **Cele şase rezistenţe.** Am văzut până acuma rezistenţele în secţii normale şi în secţiile înclinate. Am studiat chiar pentru încovoiere variaţia acestor rezistenţe şi am stabilit valoarea rezistenţelor principale. Acum vom ataca problema mai general, căutând să aflăm expresia generală a rezistenţelor în interiorul unui corp.

Pentru aceasta să luăm în interiorul corpului un paralelipiped infinit mic de laturi dx, dy, dz şi să introducem rezistenţele care lucrează pe cele şase feţe (fig. 260).

In fiecare faţă vom avea rezistenţe normale şi tangenţiale. Rezistenţele normale sunt paralele cu axele, şi le vom denumi σ_x, σ_y, σ_z. Rezistenţele tangenţiale le descompunem în două componente paralele cu axele. După cum ştim rezistenţele tangenţiale ce apar în două feţe normale sunt egale deci le vom nota cu indicele acelei axe, pe care ele sunt perpendiculare. Vom avea astfel τ_x, τ_y, τ_z.

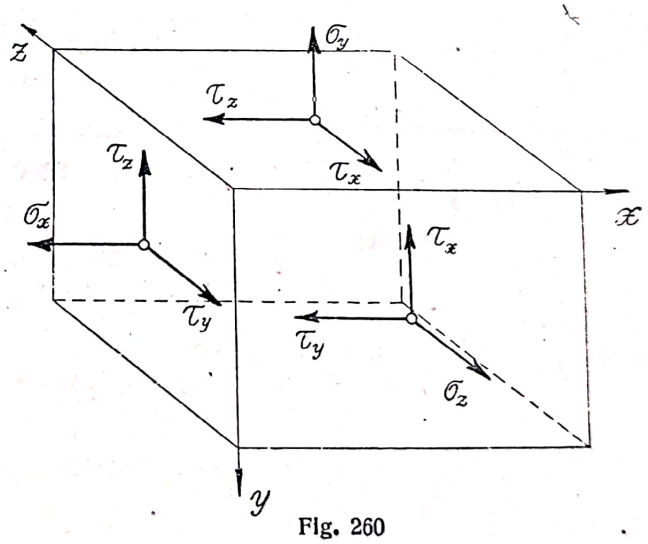


Fig. 260

Pe celelalte şase feţe vom avea aceleaşi rezistenţe la care se adaogă variaţia lor în sensul axei respective.

Avem deci în total şase rezistenţe σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z, care determină complet starea rezistenţelor în interiorul corpului în

un punct oarecare şi cu ajutorul variaţiei lor putem determina rezistenţele în o secţie oarecare.

Aceste şase cantităţi nu sunt însă independente, căci ele trebuesc să satisfacă condiţiile generale de echilibru, paralelepipedul fiind în echilibru în interiorul corpului, echilibru elastic stabilit după naşterea rezistenţelor interioare sub acţiunea sarcinilor din exterior.

166. **Ecuaţiile de echilibru.** Din cele şase ecuaţiuni universale de echilibru, am utilizat deja ecuaţiile momentelor când am scris că rezistenţele tangenţiale în două feţe normale sunt egale. Ne rămân deci trei ecuaţii de proecţii.

Să considerăm proecţia pe axa Oz şi vom avea cazul din figură (fig. 261). Rezistenţele normale sunt σ_x şi $\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}dx$,

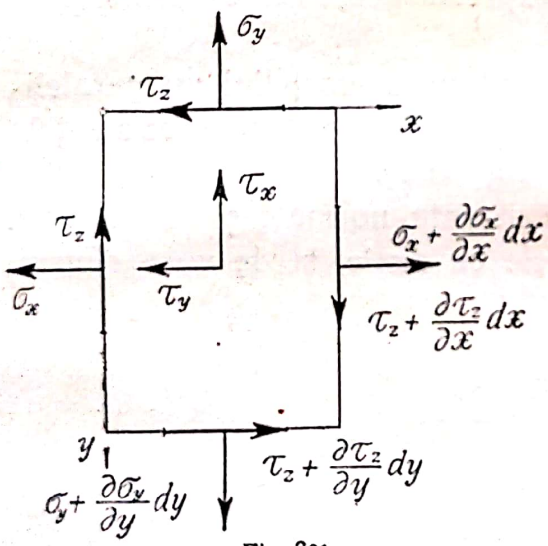


Fig. 261

$$\sigma_y \text{ şi } \sigma_y + \frac{d\sigma_y}{dy}dy$$

iar cele tangenţiale sunt τ_z şi

$$\tau_z + \frac{d\tau_z}{dx}dx \text{ şi } \tau_z + \frac{d\tau_z}{dy}dy.$$

In centrul elementului lucrează şi greutatea proprie, proporţională cu volumul $dx\,dy\,dz$, şi ale cărei componente pe axe le notăm cu X, Y, Z.

Proectând atunci pe axa x-lor avem relaţia

$$\left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}dx\right)dy\,dz - \sigma_x\,dy\,dz$$

$$+\left(\tau_z + \frac{d\tau_z}{dy}dy\right)dx\,dz - \tau_z\,dx\,dz$$

$$+\left(\tau_y + \frac{d\tau_y}{dz}dz\right)dx\,dy - \tau_y\,dx\,dy + X\,dx\,dy\,dz = 0$$

din care simplificând şi repetând pentru cele trei axe deducem

$$\frac{d\sigma_x}{dx}+\frac{d\tau_z}{dy}+\frac{d\tau_y}{dz}+X=0$$

$$\frac{d\sigma_y}{dy}+\frac{d\tau_x}{dz}+\frac{d\tau_z}{dx}+Y=0 \qquad (1)$$

$$\frac{d\sigma_z}{dz}+\frac{d\tau_y}{dx}+\frac{d\tau_x}{dy}+Z=0$$

Aceste ecuaţii numite şi ecuaţiile lui Cauchy sunt ecuaţiile de echilibru în elasticitate şi ele ne servesc pentru a găsi rezistenţele într'un punct oarecare când cunoaştem pe cele din un punct infinit vecin. Ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale, care prin integrare ne dau soluţia problemei.

Din cele şase rezistenţe vedem deci că numai trei sunt indepedente, celelalte trei fiind legate prin ecuaţiile de echilibru.

167. Variaţia rezistenţelor σ şi τ. Ecuaţiile de mai sus ne dau variaţia rezistenţelor în secţii paralele cu planele de coordonate. Să vedem însă cum variază rezistenţele în o secţie înclinată faţă cu axele.

Pentru asta să considerăm un tetraedru ale cărui muchii pe axele de coordonate sunt $dx\,dy\,dz$, iar faţa cealaltă este înclinată.

In această suprafaţă va lua naştere o rezistenţă de direcţie şi mărime oare-care p, ale cărei componente pe axe le numim p_x, p_y, p_z, şi vom căuta să le determinăm.

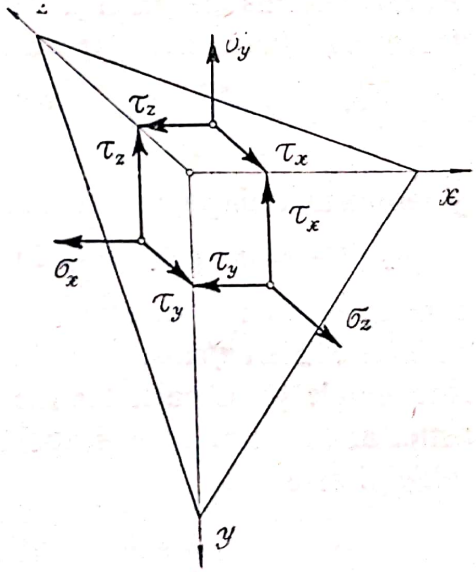


Fig. 262

Fie $d\Omega$ suprafaţa înclinată şi λ, μ, ν unghiurile pe care normala la această suprafaţă le face cu axele, proecţiile ei pe cele trei plane de coordonate sunt chiar feţele tetraedrului şi se află înmulţind cu cosinusul unghiurilor ce-l fac normalele adică avem

$$d\Omega\cos\lambda, \quad d\Omega\cos\mu, \quad d\Omega\cos\nu$$

rezistenţele în aceste feţe sunt cunoscute.

Proectând acum pe cele trei axe vom avea succesiv, reducând pe $d\Omega$

$$p_x = \sigma_x \cos\lambda + \tau_z \cos\mu + \tau_y \cos\nu$$
$$p_y = \sigma_y \cos\mu + \tau_x \cos\nu + \tau_z \cos\lambda \qquad (2)$$
$$p_z = \sigma_z \cos\nu + \tau_y \cos\lambda + \tau_x \cos\mu$$

iar valoarea rezistenţei va fi

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Să descompunem această rezistenţă p în modul obicinuit în una normală pe suprafaţă σ şi în alta tangenţială τ. Pentru asta nu avem de cât să proectăm pe p pe normala la suprafaţă, proectând fiecare din componentele ei.

$$\sigma = p_x \cos\lambda + p_y \cos\mu + p_z \cos\nu \qquad (3)$$

sau înlocuind valorile componentelor determinate mai sus găsim

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\lambda + \sigma_y \cos^2\mu + \sigma_z \cos^2\nu$$
$$+ 2\tau_x \cos\mu\cos\nu + 2\tau_y \cos\lambda\cos\nu + 2\tau_z \cos\lambda\cos\mu \qquad 4)$$

în această relaţie variabile sunt λ, μ, ν iar rezistenţele sunt date. Avem o formă de gr. II a cărei variaţie e cunoscută. Putem să facem să apară mai clar acest lucru dacă punem

$$\frac{\cos^2\lambda}{\sigma} = u^2 \quad , \quad \frac{\cos^2\mu}{\sigma} = v^2 \quad , \quad \frac{\cos^2\nu}{\sigma} = w^2$$

şi obţinem ecuaţia unei cuadrici

$$\sigma_x u^2 + \sigma_y v^2 + \sigma_z w^2 + 2\tau_x v w + 2\tau_y w u + 2\tau_z u v = 1$$

care în cazul nostru este un elipsoid ce poartă numele de *elipsoidul rezistenţelor*. Valorile maxime ale rezistenţelor, adică rezistenţele principale, au loc după axele elipsoidului care sunt astfel axele principale. Raportată la aceste axe ecuaţia elipsoidului este

$$\sigma_1 u^2 + \sigma_2 v^2 + \sigma_3 w^2 = 1$$

şi atunci în alt mod putem scrie

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\lambda + \sigma_2 \cos^2\mu + \sigma_3 \cos\nu \qquad (5)$$

în care $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sunt rezistenţele principale.

Comparând relaţia (5) cu (3) găsim

$$p_x = \sigma_1 \cos\lambda \ , \ p_y = \sigma_2 \cos\mu \ , \ p_z = \sigma_3 \cos\nu$$

de unde

$$p^2 = \sigma_1^2 \cos^2\lambda + \sigma_2^2 \cos^2\mu + \sigma_3^2 \cos^2\nu \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

Infine de aci putem scoate şi valoarea rezistenţei tangenţiale

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2$$

$$\tau^2 = \sigma_1^2 \cos^2\lambda + \sigma_2^2 \cos^2\mu + \sigma_3^2 \cos^2\nu - (\sigma_1 \cos^2\lambda + \sigma_2 \cos^2\mu + \sigma_3 \cos^2\nu)^2$$

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2\lambda \cos^2\mu + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cos^2\mu \cos^2\nu + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cos^2\nu \cos^2\lambda \quad (7)$$

Putem afla maximul rezistenţelor derivând în raport cu variabilele care sunt λ, μ, ν legate între ele prin relaţia

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

aşa că diferenţiind pe (5) obţinem

$$d\sigma = 2\sigma_1 \cos\lambda \sin\lambda\, d\lambda + 2\sigma_2 \cos\mu \sin\mu\, d\mu + 2\sigma_3 \cos\nu \sin\nu\, d\nu$$

şi care se mai poate scrie

$$d\sigma = 2p_x \sin\lambda\, d\lambda + 2p_y \sin\mu\, d\mu + 2p_z \sin\nu\, d\nu$$

în membrul al doilea avem derivatele parţiale care sunt tocmai proecţiile lui p pe o direcţie perpendiculară normalei, adică tocmai componentele lui τ. Putem deduce deci că derivata lui σ în o direcţie tangenţială este egală cu 2τ şi este nulă, adică avem maximum când rezistenţa tangenţială e nulă.

Pentru a afla maximul lui τ diferenţiem pe (7) şi avem

$$d(\tau^2) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 [2\cos\lambda \sin\lambda\, d\lambda \cos^2\mu + 2\cos\mu \sin\mu\, d\mu \cos^2\lambda] + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 [2\cos\mu \sin\mu\, d\mu \cos^2\nu + 2\cos\nu \sin\nu\, d\nu \cos^2\mu] + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 [2\cos\nu \sin\nu\, d\nu \cos^2\lambda + 2\cos\lambda \sin\lambda\, d\lambda \cos^2\nu]$$

sau grupând variabilele

$$d(\tau^2) = 2\sin\lambda \cos\lambda\, d\lambda [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2\mu + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cos^2\nu] + 2\sin\mu \cos\mu\, d\mu [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cos\nu + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2\nu] + 2\sin\nu \cos\nu\, d\nu [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cos^2\lambda + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cos^2\mu]$$

însă variabilele sunt legate între ele prin relaţia

$$\cos\lambda \sin\lambda\, d\lambda + \cos\mu \sin\mu\, d\mu + \cos\nu \sin\nu\, d\nu = 0$$

şi eliminând pe una din ele, şi scriind condiţia de maxim, avem

$$[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cos^2\nu + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2\lambda - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2\mu - (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cos^2\nu] \sin\mu \cos\mu\, d\mu + [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cos^2\lambda + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \cos^2\mu - (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2\mu - (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \cos^2\nu] \sin\nu \cos\nu\, d\nu = 0$$

cele două variabile fiind independente, expresia nu poate fi nulă

de cât când amândouă parantezele sunt nule, ceeace se scrie

$$[(\sigma_2-\sigma_3)^2-(\sigma_3-\sigma_1)^2]\cos^2\nu=(\sigma_1-\sigma_2)^2(\cos^2\mu-\cos^2\lambda)$$

care ţinând cont de relaţia (8) ne dă

$$\cos^2\nu=0\quad,\quad\cos^2\mu=\cos^2\lambda=\frac{1}{2}$$

$$\nu=90^0\qquad\mu=\lambda=45^0$$

prin permutări ciclice obţinem acelaş rezultat şi pentru celelalte axe.

Zicem atunci că rezistenţele tangenţiale sunt maxime pentru direcţii cari sunt bisectoarele acelora pentru care rezistenţele normale sunt maxime.

168. **Deformaţiile produse.** Efectul rezistenţelor este producerea deformaţiilor. Dacă luăm un cub de muchii dx, dy, dz ele vor varia cu cantităţile ξ, η, ζ. Şi atunci după cum am notat avem

$$\varepsilon_x=\frac{d\xi}{dx}$$

$$\varepsilon_y=\frac{d\eta}{dy}\qquad(9)$$

$$\varepsilon_z=\frac{d\zeta}{dz}$$

Dar după cum ştim avem şi deformaţii de unghiuri, acestea dând lunecările. Or după figură (fig. 263) vedem că această deformaţie este suma a două unghiuri COC_1+BOB_1. Confundând unghiurile cu tangentele, suma aceasta este tocmai variaţia unghiului drept adică lunecarea.

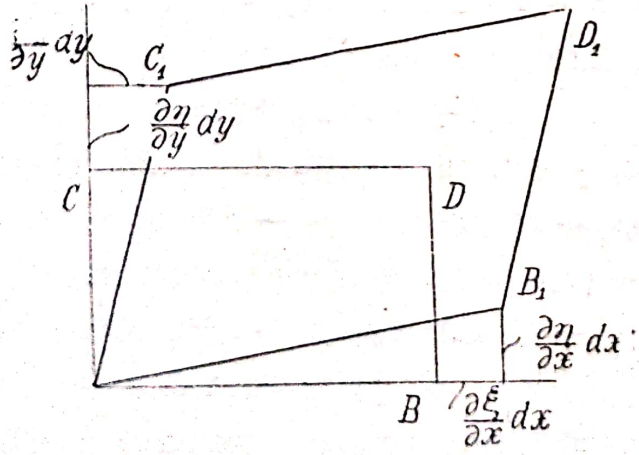


Fig. 263

Putem deci scrie

$$\gamma_z=\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}$$

$$\gamma_x=\frac{d\zeta}{dy}+\frac{d\eta}{dz}\qquad(10)$$

$$\gamma_y=\frac{d\xi}{dz}+\frac{d\zeta}{dx}$$

Dacă muchiile variază putem scrie şi variaţia volumului care este

$$dx(1+\varepsilon_x)\,dy(1+\varepsilon_y)\,dz(1+\varepsilon_z) - dx\,dy\,dz$$

lăsând la o parte termenii de ordin superior găsim deformaţia elementului de volum

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

Intre aceste deformaţii şi rezistenţele corespunzătoare avem relaţiile stabilite de legea lui Hooke şi anume

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_x+\sigma_z}{m}\right) \qquad (11)\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_y+\sigma_x}{m}\right)
\end{aligned}$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G} \quad , \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G} \quad , \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

$$\varepsilon_v = \frac{m-2}{Em}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

din acestea scoatem

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right)\\
\sigma_y &= \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right) \qquad (12)\\
\sigma_z &= \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right)
\end{aligned}$$

$$\tau_x = G\gamma_x \quad , \quad \tau_y = G\gamma_y \quad , \quad \tau_z = G\gamma_z$$

Să căutăm acum deformaţia în o direcţie oarecare şi să ne alegem diagonala ds,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

care face cu axele unghiurile λ, μ, ν adică

$$\cos\lambda = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \cos\mu = \frac{dy}{ds} \quad , \quad \cos\nu = \frac{dz}{ds}$$

lungirea diagonalei ε o putem scrie

$$ds\,\Delta\,ds = dx\,\Delta\,dx + dy\,\Delta\,dy + dz\,\Delta\,dz$$

dar creşterile pe axe sunt tocmai $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ şi deci

$$\varepsilon = \frac{\Delta\,ds}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{ds}$$

$$= \frac{d\xi}{ds}\cos\lambda + \frac{d\eta}{ds}\cos\mu + \frac{d\zeta}{ds}\cos\nu$$

putem însă considera pe ξ, η, ζ ca funcţiuni de x, y, z şi deci avem de considerat derivate parţiale

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{d\xi}{dx}\cos\lambda + \frac{d\xi}{dy}\cos\mu + \frac{d\xi}{dz}\cos\nu$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{d\eta}{dx}\cos\lambda + \frac{d\eta}{dy}\cos\mu + \frac{d\eta}{dz}\cos\nu$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\zeta}{dx}\cos\lambda + \frac{d\zeta}{dy}\cos\mu + \frac{d\zeta}{dz}\cos\nu$$

din care făcând calculele, şi ţinând cont de ecuaţiile (9) şi (10)

$$\varepsilon = \varepsilon_x\cos^2\lambda + \varepsilon_y\cos^2\mu + \varepsilon_z\cos^2\nu$$
$$+ \gamma_z\cos\lambda\cos\mu + \gamma_y\cos\lambda\cos\nu + \gamma_x\cos\mu\cos\nu \quad (13)$$

ecuaţie de ordinul al doilea, de aceiaşi formă ca şi ecuaţia (4). Avem deci de asemenea nişte direcţii principale de deformaţie şi deformaţii principale ca şi la rezistenţe.

Dacă acuma în ecuaţia (4) înlocuim valorile rezistenţelor σ_x, σ_y, σ_z, cu formulele (12) găsim

$$\sigma = \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon_x\cos^2\lambda + \varepsilon_y\cos^2\mu + \varepsilon_z\cos^2\nu + \frac{\varepsilon_\nu}{m-2}\right)$$
$$+ 2\tau_x\cos\mu\cos\nu + 2\tau_y\cos\lambda\cos\nu + 2\tau_z\cos\lambda\cos\mu$$

pe care ţinând cont de relaţia (13) o putem scrie

$$\sigma = \frac{Em}{m+1}\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon_\nu}{m-2}\right) + \left(2\tau_x - \frac{Em}{m+1}\gamma_x\right)\cos\mu\cos\nu$$
$$+ \left(2\tau_y - \frac{Em}{m+1}\gamma_y\right)\cos\lambda\cos\nu + \left(2\tau_z - \frac{Em}{m+1}\gamma_z\right)\cos\lambda\cos\mu$$

pentru ca deci σ în o direcţie oarecare să fie legat de ε în

aceiaşi direcţie prin aceeaşi relaţie (12), valabilă pentru axele de coordonate, adică pentru ca corpul să fie izotrop trebue

$$\frac{\tau_x}{\gamma_x} = \frac{\tau_y}{\gamma_y} = \frac{\tau_z}{\gamma_z} = \frac{E\,m}{2(m+1)} = G$$

relaţie între coeficienţi care este iarăşi cunoscută.

Am strâns astfel la un loc toate cunoştinţele pe care le aveam despre rezistenţe şi deformaţii dându-le o demonstraţie.

Dacă considerăm $m = 2$, vedem că trebue să avem $\varepsilon_y = 0$. Aceasta ne duce la volumul invariabil şi la rezistenţe egale

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$$

Acesta este cazul fluidelor considerate incompresibile.

169. Ecuaţiile de echilibru în funcţie de deformaţii. Dacă înlocuim valorile rezistenţelor în funcţie de deformaţii stabilite la (12) în ecuaţiile de echilibru (1) vom găsi

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_z}{dy} + \frac{d\tau_y}{dz}$$

$$= \frac{Em}{m+1}\left[\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{1}{m-2}\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dx\,dy} + \frac{d^2\zeta}{dx\,dz}\right)\right]$$

$$+ G\left(\frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dx\,dy}\right) + G\left(\frac{d^2\xi}{dz^2} + \frac{d^2\zeta}{dx\,dz}\right)$$

şi dacă scrim tot aşa pentru toate trei ecuaţiile făcând calculele vom găsi

$$G\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) + G\frac{m}{m-2}\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dx\,dy} + \frac{d^2\zeta}{dx\,dz}\right) + X = 0$$

$$G\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right) + G\frac{m}{m-2}\left(\frac{d^2\xi}{dx\,dy} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz\,dy}\right) + Y = 0$$

$$G\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}\right) + G\frac{m}{m-2}\left(\frac{d^2\xi}{dx\,dz} + \frac{d^2\eta}{dy\,dz} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}\right) + Z = 0$$

ecuaţii diferenţiale care ne dau deplasările ξ, η, ζ cunoscute sub numele de ecuaţiile lui *Laplace*.

170. Aplicaţii. 1. Să luăm o bară dreaptă raportată la axa ei Oz, şi la două axe perpendiculare Ox, Oy, Să luăm

$$\sigma_z = cx$$

şi toate celelalte nule. Vom avea atunci deformaţiile următoare

$$\varepsilon_x = \frac{d\xi}{dx} = -\frac{cx}{mE}$$

$$\varepsilon_y = \frac{d\eta}{dy} = -\frac{cx}{mE}$$

$$\varepsilon_z = \frac{d\zeta}{dz} = +\frac{cx}{E}$$

iar lunecările toate nule deci

$$\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz} = \frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy} = 0$$

Din acestea vom deduce deplasările şi avem

$$\zeta = \frac{c}{E} x z$$

$$\eta = \frac{c}{mE} xy$$

în ceea ce priveşte pe ξ el trebue să satisfacă şi condiţiile

$$\frac{d\xi}{dz} = -\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{c}{E} z, \quad \frac{d\xi}{dy} = -\frac{d\eta}{dx} = \frac{c}{mE} y$$

$$\xi = -\frac{c}{2E}\left[z^2 + \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{m}\right]$$

Aceasta ne arată că axa bucăţii, pentru care $x = 0$, $y = 0$ se deformează în planul $x\ z$ după un cerc cu rază R dată de

$$R = -\frac{E}{c}$$

daeă vom căuta pe c, suntem conduşi să aflăm rezultanta rezistenţelor σ_z. Vom avea

$$\int \sigma_z\, d\Omega = \int\int c\, x\, dx\, dy = 0$$

căci axa bucăţii este tocmai axa z şi toate centrele de greutate ale secţiilor se găsesc pe această axă. Repartiţia de rezistenţe considerată este deci echivalentă cu un moment, care este

$$M = \int \sigma_z\, x\, d\Omega = \int\int c\, x^2\, dx\, dy = c\, I$$

în care I este momentul de inerţie al secţiei în raport cu axa y. Să ne referim la axele principale fiind-că atunci

$$\int \sigma_z\, y\, d\Omega = \int\int c\, xy\, dx\, dy = 0$$

acesta reprezintând momentul centrifugal.

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea atunci

$$R = -\frac{E}{c} = -\frac{EI}{M}$$

tocmai relaţia cunoscută dela încovoiere, iar

$$\sigma_z = c\,x = -\frac{Mx}{I}$$

adică tocmai formula lui *Navier*.

Examinând expresiile deformaţiilor vedem că făcând $x=0$ avem $\eta = \zeta = 0$. In planul $x = 0$ nu avem deci nici lungiri nici scurtări, acesta ne dă *fibra neutră*. Deformaţiile schimbă semnul când x se mută deasupra sau dedesubtul acestui plan, deci avem lungiri deoparte şi scurtări de alta.

Examinând expresiile deplasărilor vom vedea că o secţie plană, adică pentru care

$$Ax + By + Cz = 0$$

rămâne plană şi după deformaţie, adică

$$A(x+\zeta) + B(y+\eta) + C(z+\zeta) = 0$$

ceea ce putem verifica, introducând expresiile deplasărilor.

Ipotezele care le-am făcut deci la stabilirea formulei lui *Navier*, sunt realizate în cazul simplu al încovoierii curate, produsă numai de momentul încovoietor.

2. Să examinăm şi torsiunea unei bare. Vom alege axa barei ca axă Oz, iar axele Ox, Oy conţinute în secţie. Un punct C se va deplasa în C' cu cantităţile ζ şi η, iar unghiul de torsiune este $\Delta\varphi$, pe care îl luăm proporţional cu distanţa de la capăt

$$\Delta\varphi = c\,z$$

avem deci

$$\xi = -r\sin\varphi\,\Delta\varphi = -c\,y\,z$$
$$\eta = \quad r\cos\varphi\,\Delta\varphi = \quad c\,x\,z$$

rezultă atunci

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{ay} = 0 \quad , \quad \varepsilon_v = \frac{d\zeta}{dz}$$

şi deci

$$\sigma_z = \frac{Em}{m+1}\left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\varepsilon_v}{m-2}\right)$$

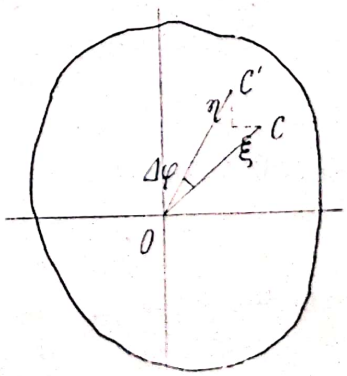


Fig. 261

care în cazul torsiunii trebue să fie nul căci nu lucrează decât momentul de torsiune la capetele barei, rezultă neapărat:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 0$$

Vom avea deci repartiţia următoare de rezistenţe

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_z = G\left(\frac{a\xi}{ay} + \frac{d\eta}{dx}\right) = 0$$

$$\tau_x = G\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) = G\left(cx + \frac{d\zeta}{dy}\right)$$

$$\tau_y = G\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) = G\left(\frac{d\zeta}{dx} - cy\right)$$

apare în aceste relaţii deformaţia ζ în senzul axului barei. Să aflăm forma pentru care ζ este nul. Vom avea atunci

$$\tau_x = G\,c\,x \quad , \quad \tau_y = G\,c\,y$$

cum pe contur τ este dirijat neapărat după tangentă adică:

$$\frac{\tau_x}{\tau_y} = \frac{dy}{dx}$$

obţinem pe contur relaţia

$$x\,dx + y\,dy = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = r^2$$

adică un cerc. Numai în acest caz $\zeta = 0$, nu avem nici o deformaţie axială şi secţiile rămân deci plane şi după deformaţie.

Putem obţine uşor formulele pentru secţia eliptică punând:

$$\zeta = k\,x\,y$$

de unde urmează

$$\tau_x = G(c\,x + k\,x) \quad , \quad \tau_y = G(k\,y - c\,y)$$

sau după condiţia pe contur

$$\frac{\tau_x}{\tau_y} = \frac{(c+k)\,x}{(k-c)\,y} = \frac{dy}{dx}$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce ne dă o elipsă

$$(c+k)x^2+(k-c)y^2=C$$

dacă punem condiţia ca această elipsă să fie chiar conturul secţiei, elipsă de axe a, b avem

$$C=2c\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \quad , \quad k=c\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

de unde

$$\tau_x=Gcx\frac{2b^2}{a^2+b^2} \quad , \quad \tau_y=-Gcy\frac{2a^2}{a^2+b^2}$$

scriind că rezistenţele fac echilibru momentului de torsiune, avem

$$M=\frac{2Gc}{a^2+b^2}(b^2I_y+a^2I_x)$$

or momentele de inerţie, ce se deduc din momentele cercului prin proecţie sunt

$$I_x=\frac{\pi ab^3}{4} \quad , \quad I_y=\frac{\pi ba^3}{4}$$

şi putem scoate valoarea lui c

$$c=\frac{a^2+b^2}{\pi a^3b^3G}M$$

de unde rezultă

$$\tau_x=\frac{2Mx}{\pi a^3b} \quad , \quad \tau_y=-\frac{2My}{\pi ab^3}$$

şi maximul are loc la capetele axelor, şi în special la capătul axei mici unde găsim

$$\tau_{max}=\frac{2M}{\pi a^2b}$$

3. Vedem din exemplul precedent, că deşi nu am avut rezistenţe decât în un plan, totuşi avem deformaţii şi după axa z. Să luăm cazul general al problemei plane, în care $\sigma_z=0$, $\tau_x=\tau_y=0$, şi nu avem rezistenţe decât în planul xy.

In acest caz vom avea ecuaţiile

$$E\frac{d\xi}{dx}=\sigma_x-\frac{\sigma_y}{m} \qquad E\frac{d\zeta}{dz}=-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}$$

$$E\frac{d\eta}{dy}=\sigma_y-\frac{\sigma_x}{m} \qquad \frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}=0$$

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dz}=\frac{\tau_z}{G} \qquad \frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}=0$$

vedem deci apariţia lui ζ în ecuaţia de mai sus, pe când numărul necunoscutelor a scăzut.

Din primele trei ecuaţii putem scoate

$$\frac{d^2\tau_z}{dx\,dy}=G\left[\frac{d^3\xi}{dx\,dy^2}+\frac{d^3\eta}{dx^2dy}\right]$$

$$=\frac{G}{E}\left[\frac{d^2\sigma_x}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_y}{dx^2}-\frac{1}{m}\left(\frac{d^2\sigma_y}{dy^2}+\frac{d^2\sigma_x}{dx^2}\right)\right]$$

ecuaţie de condiţie între rezistenţe.

Dar aceste rezistenţe trebue să satisfacă şi ecuaţiile generale de echilibru (1) care în cazul nostru devin

$$\frac{d\sigma_x}{dx}=\frac{d\tau_z}{dy}=0$$

$$\frac{d\sigma_y}{dy}+\frac{d\tau_z}{dx}=0$$

şi care pot fi satisfăcute de soluţia

$$\sigma_x=\frac{d^2\Phi}{dx^2}\quad,\quad \sigma_y=\frac{d^2\Phi}{dy^2}\quad,\quad \tau_z=\frac{d^2\Phi}{dx\,dy}$$

în care Φ este o funcţiune oare care de x, y. Inlocuind în relaţia de sus găsim

$$\frac{d^4\Phi}{dx^4}+\frac{d^4\Phi}{dx^2\,dy^2}+\frac{d^4\Phi}{dy^4}=0$$

ecuaţie diferenţială care ne dă soluţia problemei.

Există o soluție care face deplasarea ζ independentă, și reduce ecuațiile numai la trei. Aceasta este

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_o \text{ adică } \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} = const$$

care ne duce

$$\frac{d\zeta}{dz} = -\frac{\sigma_o}{Em} = const.$$

și deci derivatele ei fiind nule, satisfacem și celelalte două ecuații.

Aceasta este starea elastică plană, în care avem o deplasare independentă în senzul axei z.

Scanned with OKEN Scanner

Cap. XVIII. Calculul plăcilor şi vaselor.

171. **Generalităţi.** Până acum am examinat corpuri a căror secţie era mică faţă de dimensia axei. Le-am numit bare sau grinzi şi calculul lor l'am făcut presupunând o repartiţie a rezistenţelor în secţia transversală, care e verificată şi de experienţă.

Am văzut însă că în cazul unui corp, rezistenţele se propagă în direcţia celor trei axe şi vom avea deci de considerat rezistenţele şi deformaţiile în aceste trei direcţii. Problema este foarte complicată în cazul general.

Ne vom ajuta de oare-care simplificări. Astfel avem corpurile la care grosimea este mică faţă de celelalte dimensii, le numim plăci. In acest caz vom putea face o ipoteză asupra repartiţiei rezistenţelor pe această grosime mică.

Sunt unele plăci la care se poate admite o variaţie a rezistenţelor pe grosimea lor cu alte cuvinte pot lua momente încovoietoare. In acest caz putem face ipoteza ca şi la grinzi că rezistenţele variază liniar. Sunt altele care însă nu pot lua momente încovoietoare, sunt flexibile, şi deci rezistenţa e uniform repartizată pe grosimea lor. Acestea se numesc membrane sau pereţi subţiri.

Nu vom ataca deci problema în generalitatea ei ci vom căuta pentru fie-care caz soluţia particulară care o putem ajunge mai uşor.

In alte cazuri, problema se simplifică întru-cât deşi corpul are cele trei dimensii totuşi lucrurile se petrec la fel în diferite plane paralele, şi ne este suficient să aflăm ce se petrece în un asemenea plan. Ast-fel un disc care se roteşte, prezintă aceleaşi fenomene în diferite plane paralele, şi este suficient să exami-

năm o lăţime oare care. Un cilindru supus la presiune interioară sau rotindu-se în jurul axului, de asemenea va putea fi examinat în o singură secţie, lucrurile petrecându-se la fel în celelalte secţii vecine.

Am redus ast-fel problema din spaţiu la una plană, care evident este mai uşor de tratat.

Tot pentru simplificare vom trata numai plăcile circulare supuse la încărcări simetrice, discurile circulare, vasele cilindrice, şi vasele de revoluţie cu pereţi subţiri. In celelalte cazuri dificultăţile analitice sunt prea mari şi formulele se găsesc în diferitele tratate.

§ 1. Calculul plăcilor circulare.

172. **Echilibrul unui element.** Considerăm o placă circulară de rază R, rezemată sau înţepenită pe contur şi încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe toată suprafaţa ei.

Vom lua ca element din placă unul limitat de două suprafeţe concentrice, situat la distanţa r de centru, şi feţele laterale făcând un unghiu $d\alpha$. Înălţimea lui îngropată în grosimea h a plăcii va fi dz.

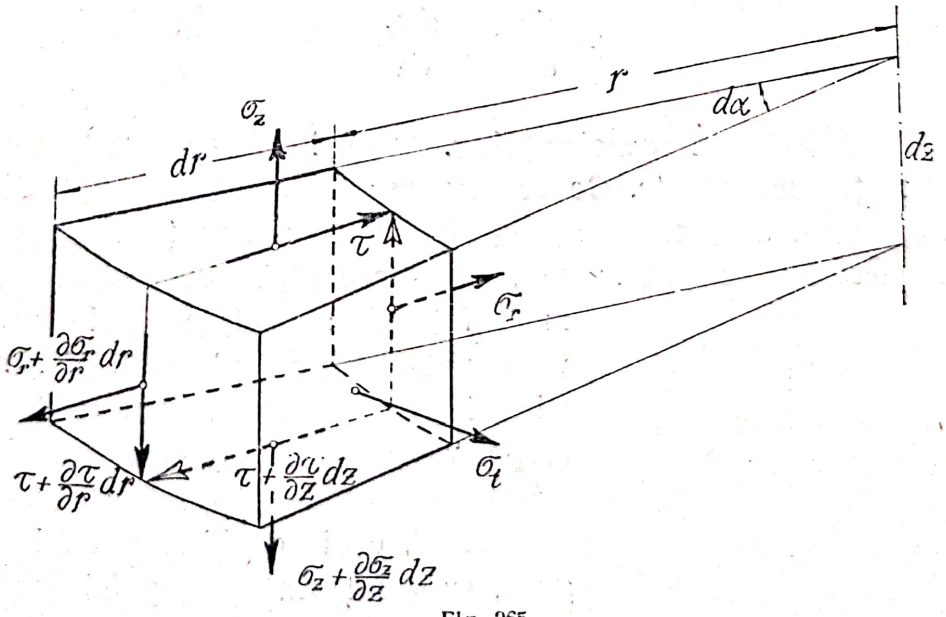


Fig. 265

Rezistenţele ce lucrează pe feţele elementului sunt normale şi tangenţiale. Feţele ce conţin axa, fiind plane de simetrie, rezis-

tenţele σ_t din aceste plane sunt principale şi nu avem rezistenţe tangenţiale. In feţele celelalte vom avea σ_r şi τ, iar pe feţele de sus şi jos σ_z şi τ. După principiul cunoscut τ trebue să fie acelaş în două suprafeţe normale. Pe feţele opuse însă din cauza variaţiei lui σ se introduce şi variaţia lui τ şi anume odată în raport cu r şi altă dată în raport cu z.

Pentru echilibru trebue să avem în direcţia radială şi verticală

$$\left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}\right) dr\,(r+dr)\,dz\,d\alpha - \sigma_r\, r\, dz\, d\alpha$$

$$+ \left(\tau + \frac{d\tau}{dz}dz\right) r\, dr\, d\alpha - \tau\, r\, dr\, d\alpha - \sigma_t\, d\alpha\, dr\, dz = 0$$

$$\left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz}dz\right) r\, dr\, d\alpha - \sigma_z\, r\, dr\, d\alpha$$

$$+ \left(\tau + \frac{d\tau}{dr}dr\right)(r+dr)\,dz\,d\alpha - \tau\, r\, dz\, d\alpha = 0$$

care după simplificare ne dau

$$\sigma_r + r\frac{d\sigma_r}{dr} + r\frac{d\tau}{dz} = \sigma_t$$

$$\tau + r\frac{d\tau}{dr} + r\frac{d\sigma_z}{dz} = 0$$

173. **Aflarea rezistenţelor.** Avem în aceste ecuaţii patru rezistenţe necunoscute. De aceia vom face oarecari simplificări. Vom considera că rezistenţa σ_z este foarte mică faţă de celelalte căci efectul ei este să modifice grosimea plăcii care şi aşa este mică faţă de suprafaţa ei. Pe urmă vom considera că placa fiind simetrică în raport cu axa, după deformaţie va rămânea tot simetrică formând un corp de revoluţie.

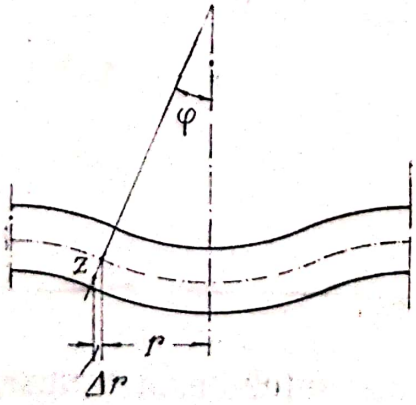


Fig. 266

Dacă deci considerăm ca în figură, suprafaţa medie a plăcii se va deforma (fig. 266) aşa că normala unui element să facă cu axa unghiul φ. Un punct situat în grosimea plăcii

la distanţa z dela suprafaţa medie, se va deplasa cu Δr şi avem

$$\Delta r = z\varphi$$

aşa că deformaţiile vor fi

$$\varepsilon_r = \frac{d\,\Delta r}{dr} = z\frac{d\varphi}{dr}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta r}{r} = z\frac{\varphi}{r}$$

dar deformaţiile sunt legate cu rezistenţele prin relaţiile cunoscute

$$E\,\varepsilon_r = \sigma_r - \frac{\sigma_t}{m}$$

$$E\,\varepsilon_t = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}$$

care ne dau

$$\sigma_r = \frac{Em}{m^2-1}\,z\left(m\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{Em}{m^2-1}\,z\left(m\frac{\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr}\right)$$

Pentru a afla pe τ vom înlocui aceste valori în prima ecuaţie de echilibru adică calculăm

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_t = \frac{Em^2}{m^2-1}\,z\left(r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r}\right)$$

adică

$$r\frac{d\tau}{dz} = -\frac{Em^2}{m^2-1}\,z\left(r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r}\right)$$

şi integrând în raport cu condiţia că τ este nul în două feţe pentru $z = \pm\frac{h}{2}$ avem

$$\tau = \frac{Em^2}{m^2-1}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2}\right)$$

174. **Aflarea ecuaţiei diferenţiale a plăcii.** Dacă ne închipuim o porţiune de placă limitată de cercul de rază r, care

ar fi încărcată cu sarcina uniform distribuită p, şi cu o sarcină concentrată în centru P, aceasta ar fi susţinută în secţia făcută de rezistenţele τ, care trebue să echilibreze forţa tăietoare

$$T = \pi r^2 p + P$$

pe care o exercită sarcina. Ecuaţia de echilibru este

$$T = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} 2\pi r \tau \, dz = 2\pi r \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau \, dz$$

înlocuind pe τ prin valoarea lui şi integrând vom ajunge la

$$T = 2\pi r \frac{Em^2}{m^2-1}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2}\right)\frac{h^3}{12}$$

aşa că înlocuind şi pe T avem

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2}\right) = \frac{6(m^2-1)}{Em^2\pi h^3}(\pi r^2 p + P)$$

pentru prescurtare vom scrie

$$\frac{6(m^2-1)}{Em^2 h^3} p = \alpha, \qquad \frac{6(m^2-1)}{Em\pi^2 h^3} P = \beta$$

şi atunci obţinem ecuaţia diferenţială a plăcilor circulare pe care o vom scrie sub forma

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = \alpha r + \frac{\beta}{r}$$

ecuaţie diferenţială de ord. II-lea a cărei integrală generală e cunoscută, şi la care trebue să adăugăm o integrală particulară corespunzătoare membrului al doilea.

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} + \frac{\alpha r^3}{8} + \frac{\beta r}{2}\left(\lg r - \frac{1}{2}\right)$$

odată aflat φ, problema este rezolvată căci putem determina deformaţiile şi rezistenţele,

Cu ajutorul lui φ putem determina şi săgeata plăcii. Dacă η este lăsarea plăcii, care se face după o suprafaţă de revoluţie a cărei ecuaţie ar fi deci $\eta = F(r)$, atunci tangenta la curbă

adică $\frac{d\eta}{dr}$ ar fi tocmai unghiul ce-l face normala cu axa adică φ, şi prin o nouă integrare am deduce

$$\eta = \frac{\alpha r^4}{32} + (2A - \beta)\frac{r^2}{4} + \frac{\beta}{4} r^2 \lg r + B \lg r + C$$

introducând încă o constantă.

175. Determinarea constantelor. Vom determina constantele calculând rezistenţele, pentru câteva cazuri curente.

Cazul I. Placă înţepenită, sarcina p. In acest caz avem

$$P = 0 \quad , \quad \beta = 0$$

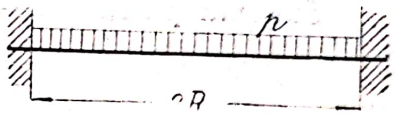


Fig. 267

Condiţiile la limită pentru margine $r = R$ avem $\varphi = 0$, $\eta = 0$ ceea ce ne va determina constantele

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} + \frac{\alpha r^3}{8}$$

$$\eta = \frac{\alpha r^4}{32} + \frac{Ar^2}{2} + B \lg r + C$$

pentru $r = 0$ avem $\varphi = 0$, ceea ce nu este posibil de cât dacă $B = 0$ şi atunci

$$A = -\frac{\alpha R^2}{8}$$

$$C = -\frac{\alpha R^4}{32} - \frac{AR^2}{3} = \frac{\alpha R^4}{32}$$

integrala în cazul nostru devine

$$\varphi = \frac{\alpha r}{8}(r^2 - R^2)$$

şi întorcându-ne la valorile deformaţiilor de oare-ce

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\alpha}{8}(3r^2 - R^2)$$

găsim

$$\varepsilon_r = \frac{\alpha}{8} z (3r^2 - R^2)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha}{8} z (r^2 - R^2)$$

rezistenţa cea mai desavantajoasă corespunde cu ε_r la margine când $r = R$ şi pentru $z = \frac{h}{2}$ adică pentru

$$\sigma_{max} = \frac{Em}{m^2 - 1} \frac{h}{2} m \frac{\alpha}{8} 2 R^2 = \frac{6 R^2}{8 h^2} p = 0{,}75 \frac{R^2}{h^2} p$$

formulă cu care se calculează placa.

Săgeata plăcii este înlocuind constantele

$$\eta = \frac{\alpha R^4}{32} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2$$

valoarea maximă are loc la mijloc când $r = 0$ şi este

$$\eta_{max} = \frac{\alpha R^4}{32} = \frac{3}{16} \frac{m^2 - 1}{Em^2 h^3} p R^4$$

$$\eta_{max} = 0{,}17 \frac{p R^4}{Eh^3}$$

Cazul II. Placa rezemată, sarcina p. Pornim de la aceiaşi ecuaţie în care iarăşi trebue să avem $B = 0$, căci altfel pentru $r = 0$ am avea valori infinite pentru rezistenţe şi săgeţi. Condiţia este ca pentru $r = R$, adică pe contur placa să fie liberă adică $\sigma = 0$ ceea ce ne dă

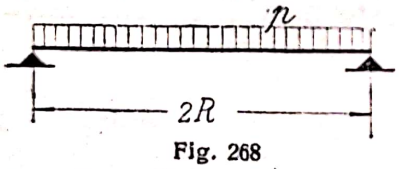


Fig. 268

$$\left(m \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right)_{r=R} = 0$$

ori avem

$$\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=R} = \frac{3}{8} \alpha R^2 + A$$

$$\left(\frac{\varphi}{r}\right)_{r=R} = \frac{1}{8} \alpha R^2 + A$$

înmulţind prima cu m şi adunând

$$A = -\frac{3m + 1}{8(m+1)} \alpha R^2$$

ceea ce ne dă

$$\varphi = \frac{\alpha r^3}{8} - \frac{3m+1}{8(m+1)} \alpha R^2 r$$

în acest caz deducem

$$\varepsilon_r = \frac{\alpha}{8} z \left(3r^2 - \frac{3m+1}{m+1} R^2\right)$$

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha}{8} z \left(r^2 - \frac{3m+1}{m+1} R^2\right)$$

iar rezistenţele vor fi

$$\sigma_r = \frac{Em}{m^2-1} z \frac{\alpha}{8} (3m+1)(r^2 - R^2)$$

$$\sigma_t = \frac{Em}{m^2-1} z \frac{\alpha}{8} \left[r^2(m+3) - R^2(3m+1)\right]$$

pentru $r = R$ se vede că $\sigma_r = 0$, pe când în centru $r = 0$, σ_r şi σ_t au valorile cele mai mari şi ele sunt egale

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{Em}{m^2-1} \frac{h}{2} \frac{\alpha}{8} (3m+1) R^2$$

înlocuind pe α cu valoarea lui

$$\sigma_{max} = \frac{3}{8} \frac{3m+1}{m} \frac{R^2}{h^2} p = 1{,}23 \frac{R^2}{h^2} p$$

Săgeata plăcii este în acest caz

$$\eta = \frac{\alpha r^4}{32} + \frac{A r^2}{2} + C$$

în care pentru $r = R$, $\eta = 0$ deci

$$C = -\frac{\alpha R^4}{32} - \frac{A R^2}{2} = \frac{\alpha R^4}{4} \frac{5m+1}{8(m+1)}$$

valoarea maximă a săgeţii are loc pentru $r = 0$ adică în mijloc

$$\eta_{max} = \frac{5m+1}{32(m+1)} \alpha R^4$$

$$= 0{,}695 \frac{p R^4}{E h^3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cazul III Placa înţepenită, sarcina P în centru. In acest caz $p = 0$, $\alpha = 0$ şi ecuaţia noastră devine

$$\varphi = \frac{\beta r}{2}\left(\lg r - \frac{1}{2}\right) + A r + \frac{B}{r}$$

Condiţia la margine este ca pentru $r = R$ avem $\varphi = 0$, $\eta = 0$, iar în mijloc pentru $r = 0$, $\varphi = 0$. Pentru aceasta din urmă trebue $B = 0$ căci altfel am avea $\varphi = \infty$, şi atunci

$$A = \frac{\beta}{4} - \frac{\beta}{2}\lg R$$

aşa că avem

$$\varphi = \frac{\beta r}{2}\left(\lg r - \frac{1}{2}\right) + \frac{r}{2}\left(\frac{\beta}{2} - \beta \lg R\right) = \frac{\beta r}{2}\lg \frac{r}{R}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\lg \frac{r}{R}$$

pe când deformaţiile devin

$$\varepsilon_r = z\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}\lg \frac{r}{R}\right)$$

$$\varepsilon_t = z\,\frac{\beta}{2}\lg \frac{r}{R}$$

Dacă căutăm deformaţiile pentru $r = 0$, găsim $-\infty$, soluţia este nedeterminată în origină şi este explicabil căci sarcina concentrată tocmai în origină va produce deformaţii foarte mari.

Săgeata se poate însă afla căci ea are expresia

$$\eta = \frac{\beta r^2}{4}\lg \frac{r}{R} - \frac{\beta}{8}(r^2 - R^2)$$

în care, pentru $r = 0$, termenul lg care tinde la ∞ este înmulţit cu r^2 care tinde mai repede la zero, deci săgeata maximă este

$$\eta_{max} = \frac{\beta R^2}{8} = \frac{6}{8}\,\frac{m^2 - 1}{E m^2 \pi h^2} P R^2 = 0{,}22\,\frac{P R^2}{E h^2}$$

Pentru a afla rezistenţele trebue să considerăm sarcina P repartizată pe o suprafaţă circulară foarte mică, un cerc cu raza b, ca prin acest fel să eliminăm nedeterminarea. In acest caz vom avea două ecuaţii, una pentru partea din interior cu

sarcină uniform distribuită şi alta pentru testul plăcii în care sarcina poate fi considerată concentrată. Vom lua atunci

$$P = \pi b^2 p$$

Fibra deformată va trebui să se racordeze aşa că din aceste condiţii vom stabili constantele

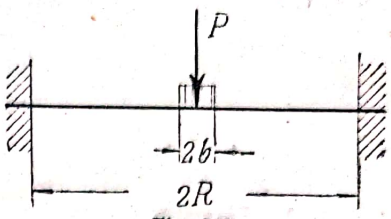


Fig. 269

$$\varphi = \frac{\alpha r^2}{8} + Ar$$

$$\varphi_1 = \frac{\beta r}{2}\left[\lg r - \frac{1}{2}\right] + A_1 r + \frac{B_1}{r}$$

pentru a determina aceste trei constante vom scrie că pentru $r = b$ avem acelaşi φ şi $\frac{d\varphi}{dr}$, şi pentru $r = R$ avem $\varphi_1 = 0$. Acestea ne dau

$$\frac{\alpha b^3}{8} + Ab = \frac{\beta b}{2}\left[\lg b - \frac{1}{2}\right] + A_1 b + \frac{B_1}{b}$$

$$\frac{3\alpha b^2}{8} + A = \frac{\beta}{2}\lg b + A_1 - \frac{B_1}{b^2} + \frac{\beta}{4}$$

$$0 = \frac{\beta R}{2}\left[\lg R - \frac{1}{2}\right] + A_1 R + \frac{B_1}{R}$$

Rezistenţa va fi maximă în porţiunea încărcată aşa că noi avem nevoe de constanta A, pe care o aflăm din aceste trei relaţii

$$A = \frac{\beta}{2}\left[\lg \frac{b}{R} + \frac{1}{2}\right] + \frac{\alpha b^4}{8R^2} - \frac{\beta b^2}{4R^2} - \frac{\alpha b^2}{4}$$

acum putem să aflăm şi rezistenţele în centru pentru $r = 0$, şi avem

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{Em}{m^2 - 1} z(m+1) A$$

şi înlocuind pe A cu valoarea lui, şi pe α şi β găsim

$$\sigma_{max} = \frac{6}{4\pi}\frac{m+1}{m}\frac{P}{h^2}\left[\lg \frac{b}{R} - \frac{b}{4R^2}\right]$$

care pentru $b = 0$ ne dă iarăşi ∞.

Cazul IV. Placa rezemată, sarcina P. In acest caz vom pleca de la aceeaşi ecuaţie

$$\varphi = \frac{\beta r}{2}\left[\lg r - \frac{1}{2}\right] + Ar + \frac{B}{r}$$

în care iarăşi $B=0$ căci pentru $r=0$, $\varphi=0$. Condiţia la margine este ca $\sigma_r = 0$, adică

$$\left[m\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right]_{r=R} = 0$$

or avem

$$\varphi_{r=R} = \frac{\beta R}{2}\left[\lg R - \frac{1}{2}\right] + AR$$

$$\left[\frac{d\varphi}{dr}\right]_{r=R} = \frac{\beta}{2}\lg R + A + \frac{\beta}{4}$$

de unde scoatem

$$A = -\frac{m-1}{m+1}\frac{\beta}{4} - \frac{\beta}{2}\lg R$$

aşa că deformaţiile devin iarăşi infinite pentru $r=0$ şi trebue să recurgem la aceeaşi cale ca în cazul precedent.

Săgeata se poate însă afla căci avem

$$\eta = (2A-\beta)\frac{r^2}{4} + \frac{\beta}{4}r^2\lg r + C$$

iar pentru $r=R$, $\eta=0$, deci scoţând pe C

$$\eta = (2A-\beta)\frac{r^2-R^2}{4} + \frac{\beta}{4}(r^2\lg r - R^2\lg R)$$

pentru $r=0$, găsim săgeata maximă şi observând că termenul $r^2\lg r$ tinde către zero, avem

$$\eta_{max} = -(2A-\beta)\frac{R^2}{4} - \frac{\beta}{4}R^2\lg R$$

în care înlocuind constanta A cu valoarea găsită

$$\eta_{max} = \frac{R^2}{8}\frac{3m+1}{m+1}\beta$$

sau înlocuind şi pe β

$$\eta_{max} = \frac{3}{4}\frac{(3m+1)(m-1)}{\pi m^2}\frac{PR^2}{Eh^3}$$

$$= 1{,}02\,\frac{PR^3}{Eh^3}$$

Pentru a afla rezistenţele în mijloc trebue să considerăm iarăşi sarcina P, uniform repartizată pe un cerc cu raza b, şi să luăm cele două porţiuni de fibră deformată

$$\varphi = \frac{\alpha r^3}{8} + Ar$$

$$\varphi_1 = A_1 r + \frac{B_1}{r} + \frac{\beta r}{2}\left[\lg r - \frac{1}{2}\right]$$

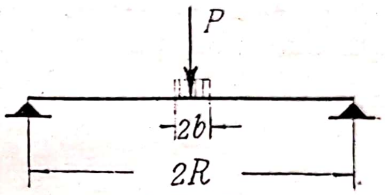


Fig. 270

Avem atunci condiţia ca pentru $r = b$, să avem acelaş φ şi $\frac{d\varphi}{dr}$, şi pentru $r = R$ să avem $\sigma_r = 0$. Ceea ce ne dă ecuaţiile

$$\frac{\alpha b^3}{8} + Ab = \frac{\beta b}{2}\left[\lg b - \frac{1}{2}\right] + A_1 b + \frac{B_1}{b}$$

$$\frac{3\alpha b^2}{8} + A = \frac{\beta}{2}\lg b + A_1 - \frac{B_1}{b^2} + \frac{\beta}{4}$$

$$\left[m\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{\varphi_1}{r}\right]_{r=R} = \frac{\beta}{2}(m+1)\lg R + A_1(m+1)$$

$$+ \frac{B_1}{R^2}(1-m) + \frac{\beta}{4}(m-1) = 0$$

Rezistenţa va fi maximă în porţiunea încărcată, aşa că vom avea nevoe de constanta A care este

$$A = \frac{\beta}{2}\lg\frac{b}{R} - \frac{\alpha b^2}{4} + \frac{m-1}{m+1}\left(\frac{3b^2}{4R^2} - \frac{\alpha b^4}{8R^2} - \frac{\beta}{4}\right)$$

aşa că putem să avem şi rezistenţele în centru pentru $r = 0$

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{Em}{m^2-1}\,z\,\frac{m+1}{2}A$$

şi înlocuind pe A, α şi β, avem

$$\sigma_{max} = \frac{6}{4\pi}\frac{m+1}{m}\frac{P}{h^2}\left[\lg\frac{b}{R} - \frac{m-1}{m+1}\left(\frac{4R^2}{b^2}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

care pentru $b = 0$, ne dă iarăşi ∞.

176. **Calculul aproximativ al plăcilor.** Se face prin analogie cu grinda şi a fost indicat de *Bach.*

Dacă considerăm o secţie după un diametru ca cea mai încărcată, şi experienţa dovedeşte că secţia periculoasă este după diametru, putem să scrim analog ca la grinzi

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

Momentul încovoietor este momentul tuturor forţelor ce lucrează la stânga. Reacţiunea este repartizată pe contur şi o reducem la centrul de greutate al arcului de cerc în d, sarcina este repartizată pe jumătate din suprafaţă şi o reducem la centrul de greutate al semicercului.

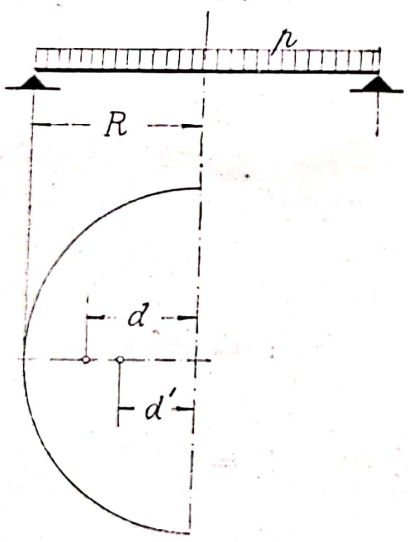


Fig. 271

$$M = \frac{\pi R^2}{2}p\,(d-d') = \frac{\pi R^2}{2}p\left[\frac{2R}{\pi} - \frac{4R}{3\pi}\right]$$

de unde

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}p\frac{2R}{3\pi}}{\frac{1}{6}2Rh^2} = \frac{R^2}{h^2}p$$

am obţinut un rezultat de aceiaş formă generală, coeficientul e însă altul.

Formula generală a plăcilor este pusă sub forma

$$\sigma_{max} = \varphi\frac{R^2}{h^2}p$$

în care φ are diferite valori, stabilite prin experienţă şi cu ajutorul cărora calculăm în fiecare caz.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o secţie dreptunghiulară, rezultatul experienţelor este că secţia periculoasă este după o diagonală Dacă P este sarcina plăcii vom da fie-cărei laturi o reacţiune proporţională cu această latură

$$A = \frac{Pa}{2(a+b)}, \quad B = \frac{Pa}{2(a+b)}$$

aşa că momentul în secţia diagonală este

$$M = (A+B)\,d - \frac{P}{2}d'$$

$$= \frac{P}{2}(d-d') = \frac{P}{2}\left(\frac{c}{2} - \frac{c}{3}\right) = \frac{P}{12}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de unde avem

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{Pab}{2(a^2+b^2)h^2}$$

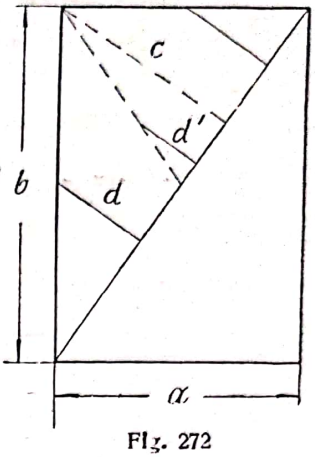


Fig. 272

Formula are un coeficient φ şi, pentru sarcina concentrată P sau uniform distribuită $p\,a\,b$, se scrie sub forma următoare

$$\sigma = 1{,}5\,\varphi \frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}\frac{P}{h^2}, \quad \sigma = \varphi \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{h^2}\frac{2p}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

din care făcând $b = a$, obţinem formulele corespunzătoare pentru placa patrată.

Sunt motive să presupunem că reacţiunea nu se repartizează uniform pe reazeme, ea fiind mai mare la centrul deschiderilor ca la colţuri. Se admite o repartizare parabolică sau triunghiulară ca în figură.

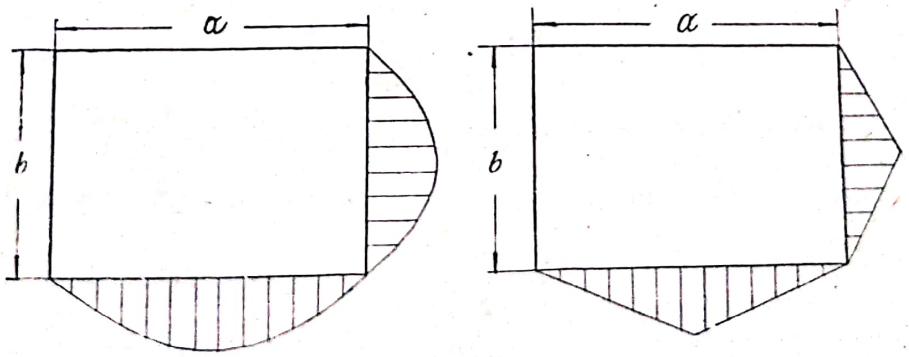


Fig. 273

In acest caz expresia momentului va varia dar se va scrie în acelaş mod.

Un alt calcul aproximativ a fost dat de *Grashof*.

El presupune placa împărţită în fâşii încrucişate ce se rezeamă pe cele două direcţii. Aceste două fâşii deformându-se, au totuşi aceeaşi săgeată la mijloc. Considerăm astfel fâşiile din mijloc pe deschiderile a şi b, supuse la sarcina uniform distribuită p, pe care o vom considera-o că se repartizează la cele două direcţii p_a şi p_b. Săgeţile vor fi

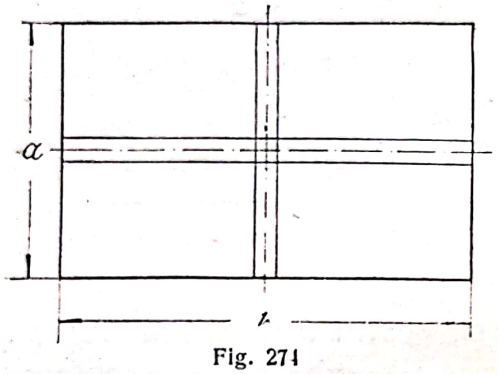


Fig. 274

$$f = \frac{5}{384}\frac{p_b a^4}{EI}$$

$$f = \frac{5}{384}\frac{p_a b^4}{EI}$$

aceasta înseamnă că

$$\frac{p_a}{p_b} = \frac{b^4}{a^4}$$

şi cum $p_a + p_b = p$ rezultă

$$p_a = \frac{pb^4}{a^4 + b^4} \qquad p_b = \frac{pa^4}{a^4 + b^4}$$

cu ajutorul cărora se calculează momentele

$$M_h = \frac{p_b b^2}{8} = \frac{pa^4 b^2}{8(a^4+b^4)}$$

$$M_x = \frac{p_a a^2}{8} = \frac{pb^4 a^2}{8(a^4+b^4)}$$

se vede aci că momentul cel mai mare are loc după axa mică.

La momentul încovoietor se determină grosimea sau rezistenţa

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{6}{8}\frac{pb^4 a^2}{(a^4+b^4)h^2}$$

Exemplu. Să se calculeze capacul cilindrului unei maşini cu abur $D = 450$ mm, $p = 12$ at.

Vom avea după formula generală

$$h = \sqrt{\varphi \frac{R^2}{\sigma_a} p}$$

în care alegem pentru coeficient valoarea $\varphi = 0{,}87$ şi rezistenţa admisibilă $\sigma_a = 600$

$$h = \sqrt{0{,}87 \frac{22{,}5^2}{600} 12} = 2{,}97 \text{ cm}$$

Pe urmă putem rotunzi grosimea şi lua $h = 30$ mm.

§ 2. Calculul vaselor cu pereţii groşi.

177. **Echilibrul unui element.** Când am examinat (nv. 22, pag. 50) un cilindru supus la presiune interioară, am admis că rezistenţa e uniform distribuită pe secţie şi am găsit

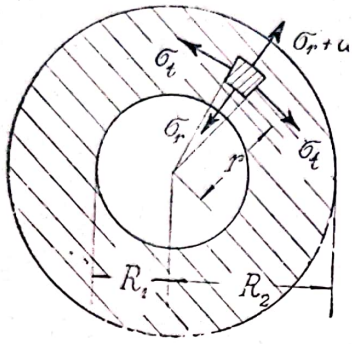


Fig. 275

$$\sigma = \frac{p\,D}{2\,h}$$

Dacă pereţii sunt groşi atunci nu mai putem admite acest lucru, căci pe grosimea pereţilor rezistenţa va varia. Din cauza simetriei însă orice plan transversal prin cilindru vom alege, va fi la fel încărcat. Vom lua deci în grosimea peretelui un element pe care îl vom studia.

Pe feţele laterale nu avem decât o singură rezistenţă normală σ_t, căci acestea sunt plane de simetrie deci rezistenţele sunt principale. Pe faţa de sus şi de jos de asemenea rezistenţele sunt principale σ_z, căci în sensul longitudinal nu avem variaţie. Rezistenţele variază numai în sensul razei σ_r.

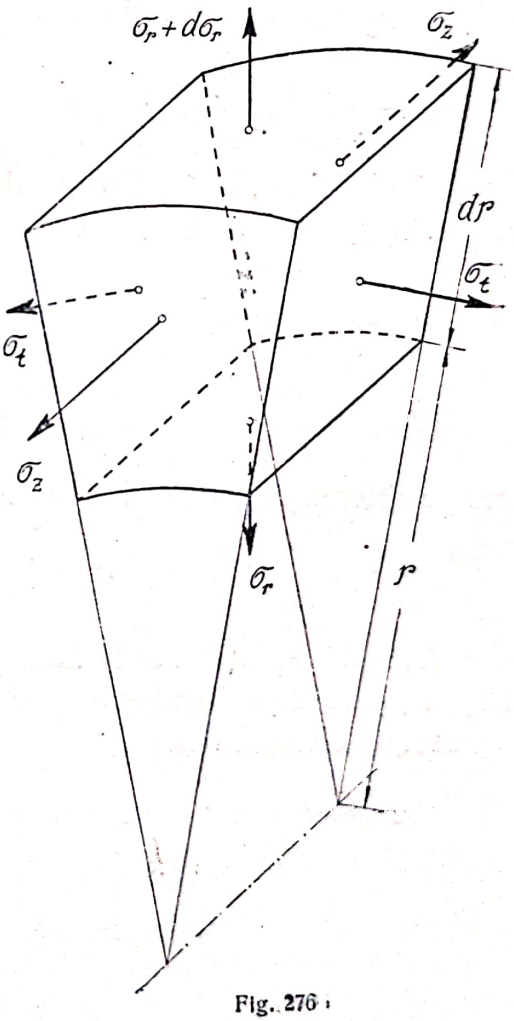


Fig. 276

Să scrim echilibrul acestui element. Avem o singură ecuaţie în sensul radial care ne dă

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\,d\varphi - \sigma_r\,r\,d\varphi - 2\,\sigma_t\,dr\,\sin\frac{d\alpha}{2} = 0$$

care după simplificare ne dă

$$\sigma_r\,dr + r\,d\sigma_r = \sigma_t\,dr$$

sau

$$\frac{d}{dr}(r\,\sigma_r) = \sigma_t$$

178. **Aflarea rezistenţelor.** Rezistenţele noastre sunt σ_r şi σ_t. Pentru a le afla vom studia deformaţia. Efectul presiunii interioare este de a umfla cilindrul, şi raza interioară creşte. Elementul nostru situat la distanţa r de axă în urma creşterii acestei distanţe cu u, se va afla la distanţa $r + u$.

Deformaţia în sensul radial şi tangenţial va fi deci

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

din care aflăm rezistenţele cu formulele cunoscute

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} \quad , \quad E\varepsilon_t = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}$$

care ne dau

$$\sigma_r = \frac{Em}{m^2-1}\left(m\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) \quad , \quad \sigma_t = \frac{Em}{m^2-1}\left(m\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right)$$

179. **Aflarea ecuaţiei diferenţiale.** Inlocuind aceste valori în ecuaţia de echilibru aflăm

$$\frac{d}{dr}\left[r\left(m\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right)\right] = m\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

ecuaţie diferenţială de ord. *II* cunoscută şi a cărei integrală este

$$u = Ar + \frac{B}{r}$$

Această ecuaţie ne dă înlocuind în formule valoarea rezistenţelor, şi ne dă în acelaş timp şi deformaţia, căci u este tocmai deplasarea elementului.

180. **Determinarea constantelor.** *Cazul I.* Presiunea interioară p_i. Condiţiile la limită sunt în acest caz

$$\text{pentru } r = R_1 \quad , \quad \sigma_r = -p_i$$

$$\text{„ } \quad r = R_2 \quad , \quad \sigma_r = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

adică cu ecuaţiile

$$-p_i = \frac{m E}{m^2 - 1}\left[(m+1)A - (m-1)\frac{B}{R_1^2}\right]$$

$$0 = \frac{m E}{m^2 - 1}\left[(m+1)A - (m-1)\frac{B}{R_2^2}\right]$$

din care aflăm

$$A = \frac{m-1}{m E}\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}p_i$$

$$B = \frac{m+1}{m E}\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}p_i$$

ceea ce ne duce la

$$\sigma_r = -\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right)p_i < 0$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{R_2^2}{r^2} + 1\right)p_i > 0$$

Se vede că σ_r este compresiune şi σ_t este tensiune. In ceea ce priveşte deformaţia ea este

$$u = \frac{p r}{m E}\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left[(m-1) + (m+1)\frac{R_2^2}{r^2}\right] > 0$$

deci toate elementele se deplasează spre exterior.

De obicei se calculează rezistenţa redusă. Dacă mai considerăm şi cazul că vasul are fund atunci trebue să ţinem seamă şi de σ_z, care este datorit presiunii pe fund şi îl putem scrie

$$\sigma_z = \frac{\pi R_1^2 p_i}{\pi (R_2^2 - R_1^2)}$$

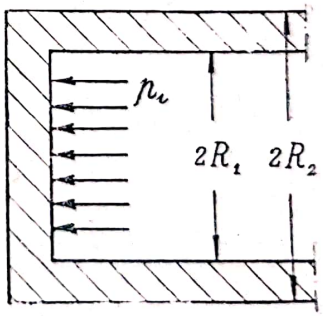


Fig. 277

şi în acest caz

$$\sigma_{red} = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} - \frac{\sigma_z}{m}$$

ceea ce ne dă

$$\sigma_{red} = \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left\{\frac{R_2^2}{r}\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \left(1 - \frac{2}{m}\right)\right\}p_i$$

rezistenţa maximă are loc în interior pentru $r = R_1$. Vom avea formula sub forma

$$R_2 = R_1 \sqrt{\frac{m\sigma_a + (m-2)p}{m\sigma_a - (m+1)p}}$$

Se vede din această formulă că radicalul devine imaginar când

$$p_i > \sigma^a \frac{m}{m+1}$$

aşa că presiunea din interior nu poate să întreacă o valoare maximă.

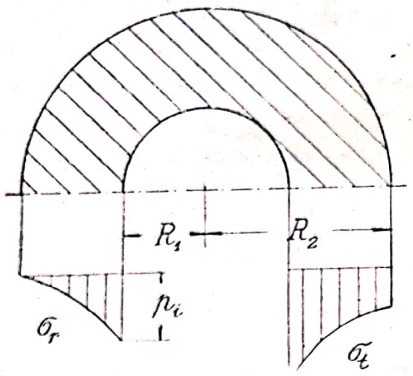


Fig. 278

Repartiţia rezistenţelor pe grosimea peretului se vede din ecuaţii. Făcând $r = R_1$ şi $r = R_2$ se obţin valorile extreme. Variaţia lor e reprezentată în figură.

Cazul II. Presiune exterioară p_e. Condiţiile la limită sunt în acest caz

$$\text{pentru } r = R_1 \quad , \quad \sigma_r = 0$$
$$r = R_2 \quad , \quad \sigma_r = -p_e$$

adică ecuaţiile ne dau

$$0 = \frac{mE}{m^2-1}\left[(m+1)A - (m-1)\frac{B}{R_1^2}\right]$$
$$-p_e = \frac{mE}{m^2-1}\left[(m+1)A - (m-1)\frac{B}{R_2^2}\right]$$

din care aflăm

$$A = -\frac{m-1}{mE}\frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}p_e$$
$$B = -\frac{m-1}{mE}\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}p_e$$

Inlocuind aceste valori aflăm rezistenţele

$$\sigma_r = \frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\left(\frac{R_1^2}{r^2} - 1\right)p_e < 0$$
$$\sigma_t = -\frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right)p_e < 0$$

se vede că amândouă rezistenţele sunt compresiuni.

In ceea ce priveşte deformaţia

$$u = -\frac{p_e r}{mE}\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left[(m-1) + (m+1)\frac{R_1^2}{r^2}\right] < 0$$

deci toate elementele se deplasează spre interior.

Exemplu. Să determinăm forţa necesară pentru montarea manivelei pe arborele motor.

Această montare se face cu presa hidraulică. Diametrul arborelui se strungeşte la o valoare D_2, mai mare decât diametrul interior D_1 al găurii manivelei Când introducem cu forţa arborele, D_2 se micşorează, D_1 creşte şi avem un diametru comun D. Cantitatea $D_2 - D_1 = u$ constitue strângerea. atorită deformaţiilor avem rezistenţe care în partea interioară sunt date de

$$\sigma_t = \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} p$$

care sunt cele mai mari şi care ne dau valoarea presiunii p.

$$p = \sigma \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}$$

Presiunile acestea se exercită pe suprafaţa fusului. Dacă lungimea este l, vom putea scrie pentru forţa necesară la montaj

$$P = f N = f p\ 2\pi R_1 l f \sigma \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 + R_1^2}$$

în care f este coeficientul de frecare.

In ceea ce priveşte pe σ, trebue ca să nu întreacă rezistenţele admisibile aşa ca deformaţiile să nu fie permanente. Dacă coeficienţii de elasticitate sunt aceiaşi pentru arbore şi manivelă, putem lua că strângerea se împarte egal la amândouă şi avem

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E u}{2 D_1} = \frac{E u}{4 R_1}$$

putem deci calcula strângerea u aşa ca materialul să reziste în bune condiţii.

§ 3. Calculul discurilor care se rotesc.

181. **Echilibrul unui element.** Un caz analog cu cel studiat în paragraful precedent este cazul unui disc care se roteşte în jurul axului său şi este supus la acţiunea forţei centrifuge.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm un disc de o grosime constantă pe care o putem lua egală cu unitatea. Nu vom avea de considerat de cât rezistenţele într'un plan, toate planurile fiind la fel încărcate.

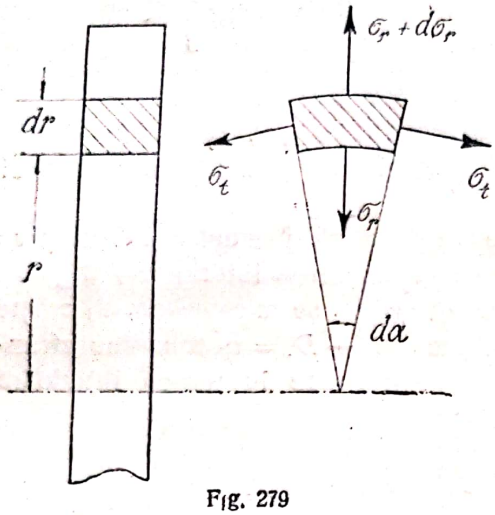


Fig. 279

Rezistenţa σ_t este o rezistenţă principală fiind în un plan principal, σ_r variază în sensul razei.

In centrul elementului mai trebue să considerăm forţa centrifugă care lucrează şi care este

$$dF = \frac{\gamma}{g} r\, dr\, d\alpha\, r\omega^2$$

Echilibrul elementului ne va fi dat de ecuaţia de proecţie după rază, adică

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\, d\alpha - \sigma_r\, r\, d\alpha - 2\,\sigma_t\, dr\, \frac{d\alpha}{2}$$

$$+ \frac{\gamma}{g} r\, d\, d\alpha \,.\, r\omega^2 = 0$$

care după simplificare ne dă

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_t + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 = 0$$

182. Aflarea rezistenţelor şi integrarea ecuaţiei. Rezistenţele le aflăm din deformaţiile produse cari şi aici sunt tot

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad , \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

iar rezistenţele vor fi ca şi în cazul precedent

$$\sigma_r = \frac{Em}{m^2 - 1}(m\varepsilon_r + \varepsilon_t) = \frac{mE}{m^2 - 1}\left(m\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1}(m\varepsilon_t + \varepsilon_r) = \frac{Em}{m^2 - 1}\left(m\frac{u}{r} + \frac{du}{dr}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

care înlocuite în ecuaţia diferenţială ne dau

$$\frac{Em^2}{m^2-1}\left(r\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)+\frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2=0$$

care ne duce la

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{a^2}r=0$$

în care am introdus pentru prescurtare

$$\frac{1}{a^2}=\frac{m^2-1}{m^2E}\frac{\gamma\omega^2}{g}$$

Integrala este cunoscută din paragraful precedent, mai rămâne să adăugăm o integrală particulară pentru membrul al doilea, aşa că avem

$$u=Ar+\frac{B}{r}-\frac{r^3}{8a}$$

183. **Determinarea constantelor.** Punem condiţia că suprafeţele sunt libere, adică $\sigma_r=0$ pentru $r=R_1$ şi $r=R_2$. Ori avem

$$\sigma_r=\frac{mE}{m^2-1}\left[(m+1)A-(m-1)\frac{B}{r^2}-\frac{3m+1}{8}\frac{r^2}{a^2}\right]$$

de unde rezultă

$$A(m+1)-\frac{B}{R_1^2}(m-1)=\frac{3m+1}{8}\frac{R_1^2}{a^2}$$

$$A(m+1)-\frac{B}{R_2^2}(m-1)=\frac{3m+1}{8}\frac{R_2^2}{a^2}$$

din care scoatem

$$B=\frac{3m+1}{m-1}\frac{R_1^2R_2^2}{8a^2}$$

$$A=\frac{3m+1}{m+1}\frac{R_2^2+R_2^2}{8a^2}$$

şi obţinem atunci valoarea rezistenţelor

$$\sigma_r=\frac{3m+1}{8m}\frac{\omega^2\gamma}{g}\left(R_1^2+R_2^2-r^2-\frac{R_1^2R_2^2}{r^2}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\sigma_t = \frac{3m+1}{8m}\frac{\omega^2\gamma}{g}\left(R_1^2 + R_2^2 - \frac{m+3}{3m+1}r^2 + \frac{R_1^2 R_2^2}{r^2}\right)$$

Variaţia rezistenţelor o avem în figura alăturată. σ_r este nul la ambele margini şi maxim unde-va la mijloc, σ_t este maxim la interior. Experienţa confirmă că ruperea discurilor are loc începând de la marginea interioară sub acţiunea lui σ_t care este cel mai mare.

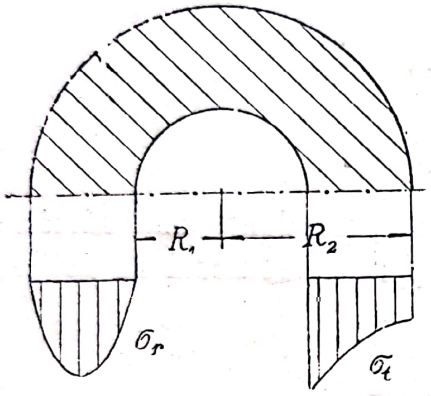


Fig. 280

Dacă considerăm un disc plin adică $R_1 = 0$, atunci formulele devin

$$\sigma_r = \frac{3m+1}{8m}\frac{\omega^2\gamma}{g}\left(R_2^2 - r^2\right)$$

$$\sigma_t = \frac{3m+1}{8m}\frac{\omega^2\gamma}{g}\left(R_2^2 - \frac{m+3}{3m+1}r^2\right)$$

în centru adică pentru $r = 0$ avem

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{3m+1}{8m}\frac{\omega^2\gamma}{g}R_2^2$$

In acest caz rezistenţele sunt mai mici ca în cazul când avem un disc găurit, aşa că se preferă la discurile cu iuţeală mare, cum sunt discurile turbinelor, să nu se facă gaură în interior.

184. **Disc de egală rezistenţă.** Distribuţia dezavantajoasă a rezistenţelor şi creşterea lor cu iuţeala, a condus la ideea discului de egală rezistenţă, cu grosime variabilă.

In acest caz, neglijând rezistenţele în sensul z vom avea pentru ecuaţia de echilibru.

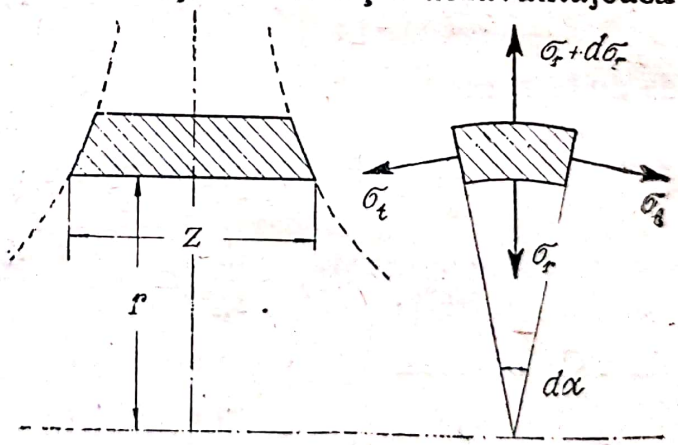


Fig. 281

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r+dr)(z+dz)\,d\alpha - \sigma_r z r\,d\alpha$$

$$-2\sigma_t\frac{2z+dz}{2}dr\frac{d\alpha}{2} + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r\,zr\,d\alpha\,dr = 0$$

care în urma simplificărilor devine

$$\frac{d}{dr}(r z \sigma_r) - z\sigma_t + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 z = 0$$

condiția ce se pune este ca să avem pretutindeni

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma = \text{const.}$$

adică

$$\frac{d}{dr}(r z)\sigma - \sigma z - \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 z = 0$$

$$\frac{dz}{dr}\sigma + \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 z = 0$$

separând variabilele și integrând avem

$$z = z_0 e^{-\frac{\gamma}{2g\sigma}\omega^2 r^2} = z_0 e^{-\frac{\gamma}{2g\sigma}v^2}$$

curba exponențială pe care am întâlnit-o la formele de egală rezistență.

Forma de egală rezistență a fost întrebuințată de Laval la turbina sa. Stodola a studiat această problemă și a găsit că pentru a asigura repartiția uniformă a rezistențe'or trebue să avem un disc svelt. Dacă luăm pentru $\sigma = 2500$ ceea ce ar corespunde la oțel nickel, și notăm cu z_0 grosimea în axă și z_1 grosimea la margine, avem pentru diferite viteze

$v =$	200	400	600	800
$\frac{z_0}{z_1} =$	1,9	12,9	310	27500

se vede că îndată ce trecem de viteza de 400 m/sec grosimea la axă crește foarte mult. In acest caz însă rezistențele nu se mai pot distribui uniform deși am dat forma teoretică, stabilită prin calcul.

§ 4. Calcul vaselor cu pereți subțiri.

185. **Echilibrul unui element.** In cazul unui inveliș subțire de o formă oare-care, vom putea face calculul numai presupunând că peretele nu lucrează de cât la tensiuni, fiind așa de subțire că nu poate lua încovoierea.

In un asemenea înveliș, de o formă oare-care să tăiem un element cu laturile ds'' și ds'. Fie ρ' raza de curbură pentru

muchia ds' şi ρ'' pentru ds'', unghiurile corespunzătoare fiind $d\alpha'$ şi $d\alpha''$, aşa în cât avem

$$ds' = \rho' \, d\alpha'$$
$$ds'' = \rho'' \, d\alpha''$$

Pe aceste feţe lucrează rezistenţele normale σ' şi σ'', pe care le presupunem uniform distribuite, tocmai pentru că am eliminat efectele încovoierii şi peretele nu răspunde de cât numai la tensiune.

Să scrim că acest element este în echilibru, adică să proectăm toate forţele pe normala la element.

$$2\sigma'' \, ds'' \, h \frac{d\alpha'}{2} + 2\sigma' \, ds' \, h \frac{d\alpha''}{2} = p \, ds' \, ds''$$

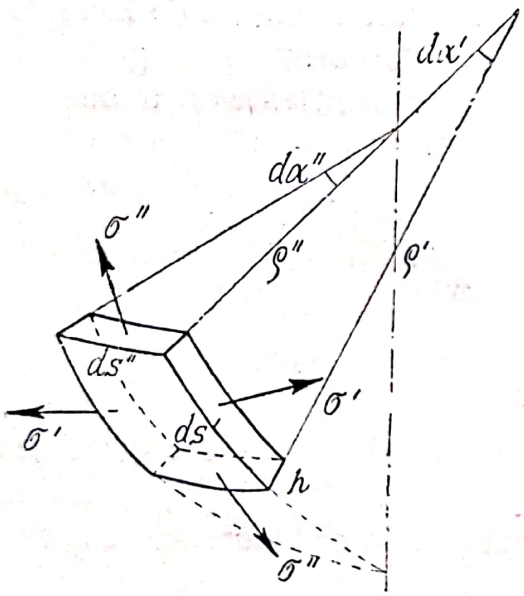


Fig. 282

înlocuind aci pe ds' şi ds'' cu cu valorile date de formulele de mai sus avem după simplificare

$$\frac{\sigma''}{\rho'} + \frac{\sigma'}{\rho''} = \frac{p}{h}$$

relaţie care ne dă rezistenţele în două secţii faţă de razele de curbură ale lor.

In caz când $\rho' = \infty$, adică avem a face cu o suprafaţă cilindrică luând $\rho'' = R$ avem

$$\sigma'' = \frac{pR}{h}$$

formulă cunoscută dela calculul cazanelor.

In cazul unui înveliş sferic, având $\rho' = \rho'' = R$, va trebui din cauza simetriei şi $\sigma' = \sigma'' = \sigma$ şi deci

$$\sigma = \frac{pR}{2h}$$

In cazul unui înveliş de formă oare-care problema e mai grea şi de aceea nu vom examina de cât cazul unui corp de revoluţie cu axa verticală de ex. In acest caz această axă este o axă principală şi toate planele meridiane devin plane principale, iar σ' devine o rezistenţă principală.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ni se dă ecuaţia curbei meridiane atunci avem

$$\rho' = -\frac{ds'}{d\alpha}$$

şi

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dr}{dz}$$

prin diferenţiare

$$\frac{1}{\cos^3\alpha}d\alpha = \frac{d^2r}{dz^2}dz$$

de unde

$$d\alpha = \frac{d^2r}{dz^2}dz\cos^2\alpha$$

$$ds' = \frac{dz}{\cos\alpha}$$

aşa că rezultă

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{d\alpha}{ds'} = \frac{d^2r}{dz^2}\cos^3\alpha$$

pe când după o teoremă cunoscută

$$\rho'' = \frac{r}{\cos\alpha}$$

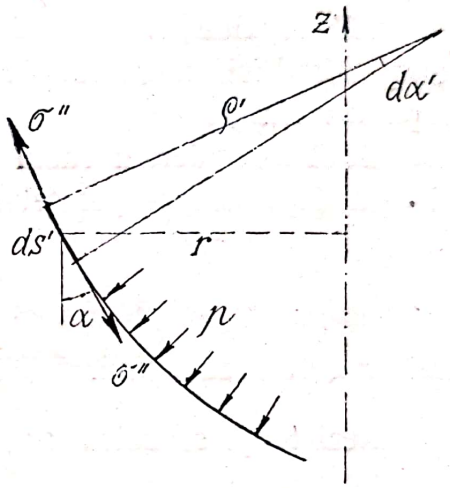


Fig. 283

aşa că avem toate elementele cunoscute.

186. **Aflarea rezistenţelor.** Având o relaţie între cele două rezistenţe mai avem nevoe de încă una. In cazul învelişului de revoluţie putem scrie pe σ'' cu o altă condiţie de echilibru

$$\int_{r_0}^{r} 2\pi r p dr = 2\pi r h \sigma'' \cos\alpha$$

$$\sigma'' = \frac{1}{hr\cos\alpha}\int_{r_0}^{r} p r dr$$

In cazul când în interior avem o presiune constantă p, integrala se efectuiază şi ne dă

$$\sigma'' = \frac{p}{hr\cos\alpha}(r^2 - r_0^2)$$

dacă este presiunea apei, atunci $p = \gamma z$ şi deci

$$\sigma'' = \frac{\gamma}{h r \cos\alpha} \int_{2_0}^{r} z r dr$$

cunoscând pe σ'' cu ajutorul relaţiei stabilite putem afla şi pe σ'

$$\sigma' = \frac{r}{\cos\alpha}\left(\frac{p}{h} + \frac{d^2r}{dz^2}\frac{\cos\alpha}{hr}\int_{r_0}^{r} p r dr\right)$$

187. Aplicaţii. *a) Calculul unei centrifuge.* Un vas cu pereţi cilindrici, ce se roteşte în jurul axei şi este deci supus forţei centrifuge.

Dacă considerăm vasul gol, vom avea numai acţiunea forţei centrifuge asupra peretelui care este

$$p = \frac{\gamma h}{g} r \omega^2$$

unde r este raza cilindrului, iar $\omega = \frac{\pi n}{30}$, iuţeala unghiulară.

Rezistenţa se calculează cu formula

$$\sigma = \frac{pr}{h} = \frac{\gamma r^2}{g}\frac{\pi^2 n^2}{900}$$

Luând $r = 45$ cm, $n = 1500$, $\gamma = 7{,}85$ găsim

$$\sigma = \frac{\frac{7{,}85}{1000} \times 45^2 \times 3{,}14^2 \times 1500^2}{981 \times 900} \simeq 360 \text{ kg/cm}^2$$

Dacă considerăm acuma şi apă în interiorul vasului, vom avea să considerăm şi acţiunea forţei centrifuge a apei. Avem deci ca mai sus

$$p_v = \frac{\gamma h}{g} r \omega^2$$

iar pentru apă vom avea de considerat acţiunea unui element, închipuindu-ne masa concentrată în centrul de greutate, adică

$$p_a = \frac{\gamma' r}{3g} r \omega^2$$

aşa în cât presiunea totală p va fi

$$p = \left(\frac{\gamma h}{g} + \frac{\gamma' r}{3 h}\right) r \omega^2$$

iar rezistenţa este

$$\sigma = \frac{r^2\omega^2}{g}\left(\gamma + \frac{\gamma' r}{3 g}\right)$$

Pentru exemplul de mai sus, luând $\gamma' = 1$, vom avea de adăogat o rezistenţă suplimentară

$$\sigma' = \frac{\gamma' r}{3 h}\frac{r^2 \omega^2}{g} = \frac{\frac{1}{1000} \times 45^3 \times 3{,}15^2 \times 1500^2}{3 \times 0{,}7 \times 981 \times 900} \simeq 1009 \text{ kg/cm}^2$$

admiţând grosimea de 7 mm, avem deci o rezistenţă totală de 1269 kg/cm^2.

Din aceiaşi formulă se poate calcula invers grosimea h.

b) Calculul unui rezervor. In general rezervorul e cilindric şi fundul se face sferic sau parabolic. Aplicăm atunci pentru calculul pereţilor formulele stabilite.

Dacă luăm fundul sferic şi săgeata la mijloc egală cu s atunci în acest punct este adâncimea de apă mai mare şi deci presiunea. Rezistenţele în acest punct vor fi

$$\sigma' = \sigma'' = \frac{p\rho}{2\delta} = \frac{\gamma(h+s)}{2\delta}\frac{R^2 + s^2}{2s}$$

în care am aflat raza necesară pentru cercul ce trece prin cele trei puncte date.

In punctul dela margine avem presiunea corespunzătoare înălţimei h deci

$$\sigma' = \sigma'' = \frac{\gamma h}{2\delta}\frac{R^2 + s^2}{2s}$$

In acelaşi punct în cilindru avem o rezistenţă

$$\sigma = \frac{\gamma h R}{\delta}$$

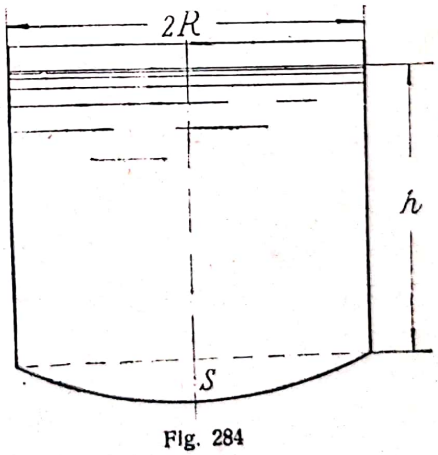


Fig. 284

şi deci există o variaţie de rezistenţă între cele două părţi. Cum între acestea se face o îmbinare ea va suporta această diferenţă, şi tot ea va lua şi reacţiunea, căci pe acest inel rezervorul reazemă pe zid.

Din cauza fundului sferic avem o împingere în reazeme, aşa că inelul se calculează la tensiune sub acţiunea acestei împingeri. Fundul se poate face concav sau convex, lucrând la tensiune sau compresiune.

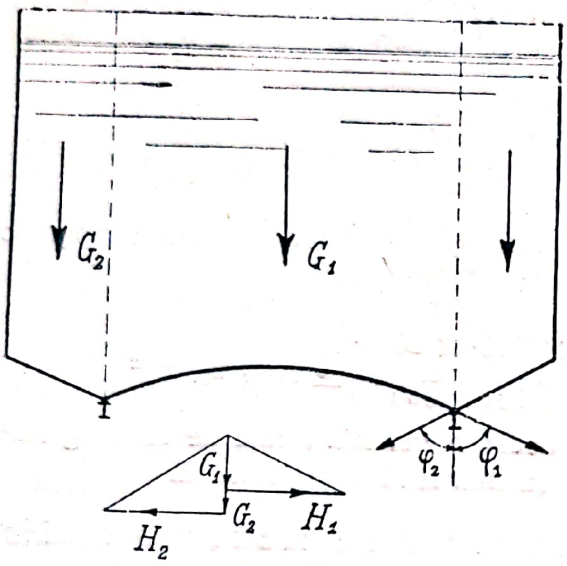


Fig. 285

Pentru a evita aceste împingeri în inel, se întrebuinţează la rezervoarele mari un fel de construcţie datorită lui *Intze*, care permite să anulăm împingerea. Se face rezervorul în consolă, prevăzând partea exterioară cu un fund conic şi partea din interior cu un fund sferic. Unghiurile acestora fiind φ_2 şi φ_1, se aranjează greutăţile G_1 şi G_2 aşa fel în cât împingerile H_1 şi H_2 să fie egale. Ceea ce ne dă

$$G_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = G_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

In acest caz inelul nu transmite de cât componentele verticale $G_1 + G_2$ şi nu mai împinge în ziduri. In acelaşi timp diametrul este redus şi turnul de zidărie care suportă rezervorul este mai mic. deci economie de material.

Cap. XIX. Oscilaţii.

188. **Generalităţi.** Până acum ne-am ocupat de sarcini din punct de vedere static, fără a intra mai adânc în natura fenomenelor. Dar sarcinile aduc după sine deformaţii, părticelele corpului se pun în mişcare, avem deci acceleraţie şi de considerat efectele forţelor de inerţie.

Este natural ca şi rezistenţele să aibă nevoe de un timp pentru a se propaga în interiorul corpului. Şi dacă nu se pot transmite ele vor creşte până la valori superioare celor aflate până acum.

Ne putem face o idee de acest fenomen examinând problema cunoscută a unei bare supuse la tensiune. Legătura între tensiune şi lungire, respectiv între rezistenţă şi deformaţie, este stabilită prin legea lui Hooke, legea proporţionalităţii. La început lungirea fiind nulă şi forţa este nulă, şi nu creşte de cât proporţional cu aceasta.

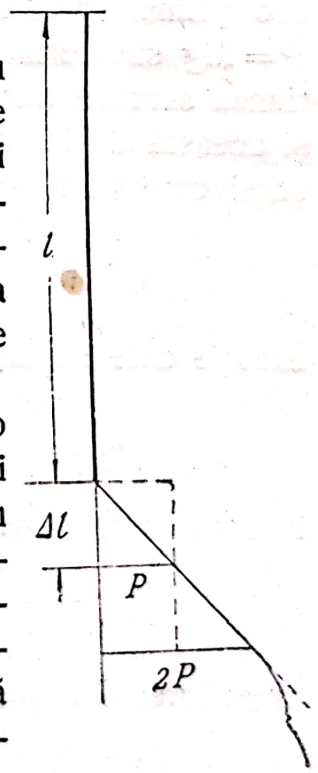


Fig. 286

Dacă presupunem că aplicăm brusc o forţă cu intensitatea P, bara nu se va lungi decât după aceiaşi lege. Ne rămâne deci un supliment de lucru mecanic, căci la o deformaţie dată corespunde o forţă anumită. Acesta se înmagazinează sub formă de deformaţie, care astfel creşte până ajunge după cum arată figura la $2\,\Delta l$. Prin faptul aplicării bruşte a sarcinei am mărit la dublu deformaţia şi deci rezistenţele.

Dacă privim mai de aproape vedem că sub influenţa iner-

ţiei sarcinii bara se va lungi mai mult de cât Δl. Rezistenţele interioare sporind, bara va opri sarcina P silind'o să se întoarcă înapoi. In virtutea inerţiei va depăşi poziţia de echilibru şi se vor produce oscilaţii în jurul acesteia. Descărcată bara avea lungimea l, poziţia de echilibru este după stabilirea repaosului cu lungirea Δl, maximul va fi deci $2\,\Delta l$. Ne putem deci închipui ca rezistenţele să se dubleze din cauza acestei aplicaţii în mod brusc a sarcinilor.

Aceste oscilaţii sunt periculoase prin oboseala materialului, şi prin fenomenul de rezonanţă cunoscut din mecanică. O impulsiune periodică poate mări amplitudinea oscilaţiilor şi poate produce ruperea, deşi are o valoare mică. In organele de maşini aceste impulsiuni periodice sunt tocmai modul general de propagare al sarcinilor. Se ţine cont de acest lucru în primul rând prin coeficientul de siguranţă mai mare care se adoptă, şi prin rezistenţele admisibile speciale pentru aceste construcţii.

189. **Oscilaţii la întindere.** Problema de mai sus o putem examina, ca pe o problemă de mecanică. Să neglijăm, într'o primă aproximaţie, masa barei şi să considerăm sarcina $P = Mg$ sub forma unei mase aplicată cu o viteză v. Sub acţiunea sarcinei bara va suferi o lungire pe care o notăm cu ξ, şi această deplasare va produce şi o acceleraţie a extremităţii barei care va fi $d^2\xi/dt^2$. Vom avea astfel

$$P = M\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{E\,\Omega}{l}\xi = Mg$$

ecuaţie care ne dă pe ξ sub formă diferenţială

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{E\,\Omega}{l\,M}\xi = g$$

în care dacă punem

$$\alpha^2 = \frac{E\,\Omega}{l\,M}$$

avem integrala cunoscută

$$\xi - \frac{g}{\alpha^2} = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t$$

mişcarea oscilatorie cunoscută din mecanică a cărei constante

sunt determinate de condiţia iniţială că pentru $t = 0$ avem $\xi = 0$, şi $\frac{d\xi}{dt} = v$. Găsim

$$\xi = \frac{g}{\alpha^2} - \frac{g}{\alpha^2}\cos\alpha t + \frac{v}{\alpha}\sin\alpha t$$

Perioada aceste mişcări este

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{lM}{E\Omega}}$$

iar oscilaţiile au loc între două valori limite care sunt

$$\xi_{1,2} = \frac{g}{\alpha^2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{\alpha^4} + \frac{v^2}{\alpha^2}}$$

valoarea medie fiind

$$\xi_m = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \frac{g}{\alpha^2} = \frac{lMg}{E\Omega}$$

adică tocmai valoarea cunoscută de la întinderea bucăţii sub o sarcină statică.

Dacă luăm cazul $v = 0$, adică sarcina aplicată brusc, atunci

$$\xi_1 - \frac{2g}{\alpha^2} = \frac{2lMg}{E\Omega} = \xi_m \ , \quad \xi_2 = 0$$

lungirile sunt dublate, deci şi rezistenţele. Sau în alt mod de a vorbi coeficientul dinamic este 2.

190. **Oscilaţii la torsiune.** Să luăm o bară fixată la un capăt şi la celălalt o masă m asupra căreia lucrează un moment de torsiune M. Sub influenţa acestui moment bara se răsuceşte cu un unghiu,

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p}$$

Dacă masa m lucrează solidar cu arborele, ea se roteşte de un unghiu φ iar $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ este acceleraţia unghiulară. Ecuaţia de mişcare e în acest caz

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M = -\frac{GI_p}{l}\varphi$$

ecuaţie cunoscută în care dacă punem

$$\alpha^2 = \frac{G I_p}{l I}$$

găsim integrala

$$\varphi = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$$

iarăşi mişcarea oscilatorie a cărei perioadă este

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi \sqrt{\frac{l I}{G I_p}}$$

Dacă avem cazul unui arbore cu două roţi a căror momente de inerţie sunt I_1 şi I_2 şi asupra cărora lucrează momentele M_1 şi M_2, vom avea o torsiune a arborelui. Rotaţiile capetelor fiind φ_1 şi φ_2, diferenţa lor va fi torsiunea adică

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = \frac{M l}{G I_p}$$

iar M momentul de torsiune corespunzător. Ecuaţiile de mişcare vor fi

$$M_1 - M = I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \quad , \quad M - M_2 = I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2}$$

ecuaţia devenind prin eliminarea lui φ_1 şi φ_2, scăzând,

$$\frac{M_1}{I_1} + \frac{M_2}{I_2} - M\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right) = \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2}$$

sau

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(\frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_2}\right) \frac{G I_p}{l} \varphi = \frac{M_1}{I_1} = \frac{M_2}{I_2}$$

care este tot o mişcare oscilatorie.

Cazul important este când M_1 şi M^2 variază şi ei periodic, ceea ce s'ar putea exprima scriind

$$\frac{M_1}{I_1} + \frac{M^2}{I^2} = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \ldots\ldots + A_n \cos n\omega t + B_1 \sin \omega t + B^2 \sin 2\omega t + \ldots\ldots + B_n \sin n\omega t$$

în acest caz ecuaţia este

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \alpha^2 \varphi = A + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t$$

în care A_0 corespunde la sarcina statică iar suma reprezintă termenul variabil. Integrala este în acest caz

$$\varphi = \varphi_0 + A\cos\alpha t + B\sin\alpha t + \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cos n\omega t + D_n \sin n\omega t$$

Coeficienții C_n și D_n îi determinăm prin satisfacerea ecuației diferențiale și găsim

$$C_n = \frac{A_n}{\alpha^2 - n^2\omega^2} \quad , \quad D_n = \frac{B_n}{\alpha^2 - n^2\omega^2}$$

Peste oscilațiile proprii se suprapun deci o serie de alte oscilații datorite variației lui M. Se vede că dacă avem

$$\alpha^2 = n^2\omega^2 \quad , \quad n\omega = \alpha = \sqrt{\frac{GI_p}{l}\left(\frac{1}{I^2} + \frac{1}{I^2}\right)}$$

atunci unii coeficienți și deci unghiul φ ating valoarea infinit, fenomen cunoscut sub numele de rezonanță, care are loc atunci când perioada oscilațiilor sarcinii, corespunde cu aceea a oscilațiilor proprii.

Acest pericol îl putem îndepărta sigur alegând $\omega > \alpha$, adică fixând turația arborelui nostru. Dacă am îngroșa arborele, mărind pe I_p, vedem că aceasta ar produce mărirea lui α și deci a pericolului rezonanței. Micșorând secția obținem deci un arbore mai puțin expus rezonanței.

191. Propagarea rezistențelor în interiorul corpului. Dacă luăm în considerare masa barei atunci fenomenele de oscilație se vor petrece în însăși masa corpului. Să luăm astfel bara supusă la întindere, și să introducem în calcul și inerția masei barei.

Luând astfel o secție la distanța x, vom avea în această secție rezistența datorită sarcinii statice, și aceea datorită mișcării. Partea statică e cunoscută căci putem scrie

$$\sigma'\,\Omega = Mg + \gamma\,(l - x)\,\Omega$$

$$E\,\Omega\,\xi' = Mg\,x + \gamma\,\Omega\,x\left(l - \frac{x}{2}\right)$$

In ceea ce priveşte rezistenţa provenită din inerţia barei σ'' vom scrie întâi forţa de inerţie care este

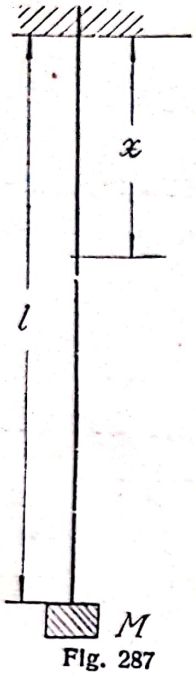


Fig. 287

$$F = dm\frac{d^2\xi''}{dt^2}$$

şi vom lua echilibrul elementului dm, încărcat cu rezistenţele σ'' şi $\sigma'' + d\sigma''$. Avem

$$\frac{d\sigma''}{dx}dx\,\Omega = dm\frac{d^2\xi''}{dt^2}$$

ori cum

$$\sigma'' = E\varepsilon'' = E\frac{d\xi''}{dx}$$

avem ecuaţia

$$E\frac{d^2\xi''}{dx^2} = \frac{\gamma}{g}\frac{d^2\xi''}{dt^2}$$

Dacă punem

$$\frac{Eg}{\gamma} = a^2$$

atunci integrala cea mai generală a ecuaţiei este

$$\xi'' = f(x - at)$$

o funcţie periodică, şi pe care o putem supune la condiţia ca în locul x_1 şi la timpul t_1, să aibă aceleaşi valori ca pentru x_2 şi t_2. Adică

$$f(x_1 - at_1) = f(x_2 - at_2)$$

$$x_1 - x_2 = a(t_1 - t_2)$$

$$a = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2}$$

a este deci viteza cu care ξ'' se reproduce din un loc în altul, sau viteza cu care rezistenţa împreună cu deformaţia se propagă dealungul corpului.

Dacă vrem să aflăm forma funcţiei vom presupune că ξ'' depinde de x şi t prin două funcţiuni, scriind

$$\xi'' = X.\,T$$

Scanned with OKEN Scanner

înlocuind ajungem astfel la

$$a_2\, T \frac{d^2 X}{dx^2} = X \frac{d^2 T}{dt^2}$$

şi separând variabilele

$$\frac{a^2}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{T}\frac{d_2\, T}{dt^2} = -a^2\omega^2$$

şi integrând pe fiecare în parte

$$T = A\cos a\,\omega t + B\sin a\,\omega t$$

$$X = C\cos\omega x + D\sin\omega x$$

Avem deci forma oscilatorie în care putem determina constantele punând condiţia că pentru $x = 0$ avem un punct fix, şi deformaţia nulă or care ar fi t. Rezultă atunci $C = 0$, şi

$$\xi'' = \sin\omega x\,(A, \cos a\,\omega t + B_0 \sin a\,\omega t)$$

pe care o putem desvolta şi aduce sub forma

$$\xi'' = \frac{A_0}{2}\sin\omega(x + at) + \frac{A_0}{2}\sin\omega(x - at)$$

$$-\frac{B_0}{2}\cos\omega(x + at) + \frac{B_0}{2}\sin\omega(x - at)$$

Aceasta se petrece în senzul axei x. Dacă am căuta în interiorul unui corp, unde dăm o deplasare în o direcţie x,

$$\xi = A\sin\omega(x - at) \quad , \quad \eta = 0 \quad , \quad \zeta = 0$$

vom avea

$$\varepsilon_x = \frac{d\xi}{dx} = A\omega\cos\omega(x - at) \; , \; \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$$

$$\sigma_x = \frac{Em}{m+1}\left[\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m-2}\right] = \frac{Em}{m+1}\frac{m-1}{m-2}\frac{d\xi}{dx}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad , \quad \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

şi deci înlocuind în ecuaţia de echilibru găsim

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + X = 0$$

adică

$$\frac{Em(m-1)}{(m+1)(m-2)}\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{\gamma}{p}\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$$

ceeace ne dă

$$\frac{Em(m-1)}{(m+1)(m-2)} - a^2 \frac{\gamma}{g} = 0$$

de unde scoatem viteza de propagare a oscilaţiilor

$$a = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \frac{Em(m-1)}{(m+1)(m-2)}} = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \frac{2m-2}{m-2} G}$$

pentru oţel am avea $G = 850000$ şi deci

$$a = \sqrt{\frac{981}{0{,}00785} \frac{2\frac{10}{3}-2}{\frac{10}{3}-2} 850000} = 616000 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

adică 6160 m/sec, viteză verificată de experienţă.

Pentru $m = 2$ formula ne-ar da viteza infinită. Cazul corespunde corpurilor incompresibile, care nu suferă deformaţii şi în care nu există mişcări vibratorii, efectele transmiţându-se instantaneu.